

## ねじりによる断面変形を考慮した梁理論の定式化と有限要素の開発

A beam theory with cross-sectional deformation due to torsion and its finite element

須田陽平\*  
Yohei SUDA

\*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

In this study, a beam theory with cross-sectional deformation due to torsion is proposed, applicable to arbitrary cross-sections. A new degree of freedom, independent of the angle of twist, which determines the magnitude of the warping deformation is introduced. The cross-sectional deformation is obtained numerically by a finite element analysis of the representative volume element with periodic boundary conditions. This homogenization method makes the present theory applicable to arbitrary cross-sections. The deformation is used to obtain not only the warping function but also the cross-sectional deformation parameters introduced in the proposed torsion theory.

The results show that the distribution shape of the cross-sectional deformation can be successfully reproduced by the proposed theory. A beam element based on the proposed theory is also developed. Comparison with the analytical solution by the proposed theory shows good convergence of the developed beam element.

**Key Words:** torsion, deformation of cross section, warping, representative volume element

## 1. はじめに

梁の古典的理論は、Bernoulli-Euler による曲げ理論に始まった。Saint-Venant は曲げ問題における Bernoulli-Euler 理論と同様に、純ねじり問題に対するねじりの変位場を導入し、ねじり理論の基礎を作った。Saint-Venant のねじり理論では、ねじりに伴う軸方向の変位（そり）が拘束されないため軸ひずみが生じず、せん断変形によってのみねじりモーメントが生じる。しかし、このような状況は円断面でしか成り立たず、一般の断面ではそりによる応力がねじりに影響する。そのため、Saint-Venant のねじり理論はその拘束による軸応力や 2 次的なせん断応力が考慮された曲げねじり理論<sup>1)</sup>へ発展した。曲げねじり理論では、そりによる軸方向の変位をそり関数とねじり率の積で表し、その大きさがねじり率に比例すると仮定している。また、近年では任意断面について、そりの拘束による影響を数値的に評価する方法も提案されている<sup>2),3)</sup>が非均質断面を対象としていない。

一方、代表体積要素に周期境界条件を含む相対変位を与え、曲げ、せん断、ねじりによる断面変形をそれぞれ表現することのできる数値解析手法<sup>4)</sup>が提案されている。斉木・鄭はこの手法を用いて非均質断面を含む任意断面に適用可能かつせん断に伴う断面変形をせん断力とは独立に考慮した理論<sup>5)</sup>を提案している。

以上を踏まえ、本研究では斉木・鄭<sup>5)</sup>に倣い代表体積要素を用いて断面のそりを変位場に組み込み、その大きさをねじり角とは独立に自由度に持つ梁理論の構築を目的とする。

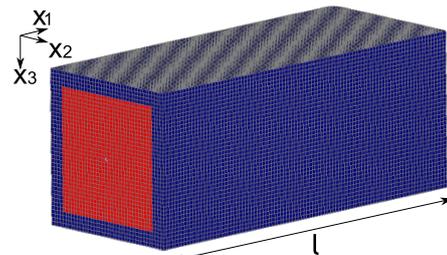


図-1 解析対象と座標・領域の設定

## 2. ねじりによる断面変形を考慮した梁理論の定式化

## (1) 問題と変位場の設定

図-1 に示すような長さ  $l$  の長さ方向に一樣な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を  $x_1$ 、梁軸直角水平方向を  $x_2$ 、鉛直方向を  $x_3$  とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を  $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を  $A$ 、ねじり中心を  $x_2, x_3$  の原点とする。斉木ら<sup>5)</sup>は任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を  $f(x_2, x_3)$  と定義することを提案している。本論文ではこの変位場を参考に、そりねじりによる断面変形に起因する梁軸方向の変位場を  $f_i(x_2, x_3)$  とすることを提案する。梁のねじり角を  $\varphi(x_1)$ 、断面変形  $f_i$  に対する一般化変位を  $g_i(x_1)$  とすると、梁の変位場はそれぞれ

$$u_1 = f_i(x_2, x_3)g_i(x_1) \quad (1)$$

$$u_2 = -x_3\varphi(x_1) \quad (2)$$

$$u_3 = x_2\varphi(x_1) \quad (3)$$

と表すことができる。変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1 = f_1 g_1' \quad (4)$$

$$\gamma_{12} = \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 = f_{1,2} g_1 - x_3 \varphi' \quad (5)$$

$$\gamma_{13} = \partial u_1 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_1 = f_{1,3} g_1 + x_2 \varphi' \quad (6)$$

となる。ここに、 $(\cdot)_{,i}$  は  $x_i$  に関する偏導関数、 $(\cdot)'$  は  $x_1$  に関する導関数を表す。

### 3. 支配方程式の定式化

解析領域を  $V := L \times A$  とし、境界条件としての表面力  $t_i$  を考慮した仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & \int_V \{E\epsilon_{11} \delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12} \delta\gamma_{12} + \gamma_{13} \delta\gamma_{13})\} dV \\ & = \int_{\partial V} \{t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2 + t_3 \delta u_3\} dA \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。ここで  $:=$  は定義、 $\partial V$  は解析領域の境界面（梁の両端の断面）、 $\delta(\cdot)$  は  $(\cdot)$  の仮想ひずみもしくは仮想変位を表す。上式に (4), (5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_V \{E(f_1 g_1') (f_1 \delta g_1') + G(f_{1,2} g_1 - x_3 \varphi') (f_{1,2} \delta g_1 - x_3 \delta \varphi') \\ & + G(f_{1,3} g_1 + x_2 \varphi') (f_{1,3} \delta g_1 + x_2 \delta \varphi')\} dV \\ & = \int_{\partial V} \{t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2 + t_3 \delta u_3\} dA \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。上式を展開すると

$$\begin{aligned} & \int_V \{E f_1^2 g_1' \delta g_1' + G(f_{1,2}^2 g_1 - f_{1,2} x_3 \varphi') \delta g_1 \\ & - G(f_{1,2} x_3 g_1 - x_3^2 \varphi') \delta \varphi' + G(f_{1,3}^2 g_1 + x_2 f_{1,3} \varphi') \delta g_1 \\ & + G(x_2 f_{1,3} g_1 + x_2^2 \varphi') \delta \varphi'\} dV \\ & = \int_{\partial V} \{t_1 f_1 \delta g_1 - x_3 t_2 \delta \varphi + x_2 t_3 \delta \varphi\} dA \end{aligned} \quad (9)$$

となり、さらに断面積分を実行すると、最終的に弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} & \int_L \{R_{11} g_1' \delta g_1' + (R_{12} g_1 + R_{13} \varphi') \delta g_1 + (R_{13} g_1 + K_1 \varphi') \delta \varphi'\} dx_1 \\ & = (\bar{D}_1 \delta g_1 + \bar{T} \delta \varphi) \Big|_{x=0, L} \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。ここに、 $K_i$  は合成断面のねじり剛性、 $R_{ij}$  は断面変形に関するパラメータであり、 $A$  を断面として

$$\begin{aligned} K_t & := \int_A G \{(x_2)^2 + (x_3)^2\} dA, \\ R_{11} & := \int_A E f_1^2 dA, \\ R_{12} & := \int_A G \{(f_{1,2})^2 + (f_{1,3})^2\} dA, \\ R_{13} & := \int_A G (f_{1,3} x_2 - f_{1,2} x_3) dA \end{aligned} \quad (11)$$

と定義した。また、 $\bar{D}_i$ 、 $\bar{T}$  は端部断面に作用する外力の合力で

$$\bar{D}_i := \int_A t_{1,i} dA,$$

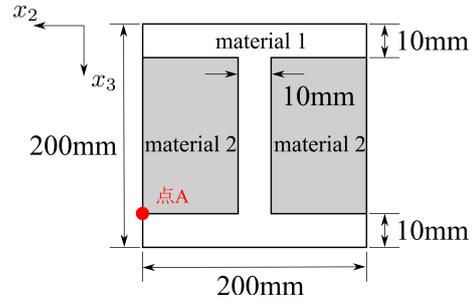


図-2 非均質断面

$$\bar{T} := \int_A (x_2 t_3 - x_3 t_2) dA \quad (12)$$

と定義した。 $\bar{D}_i$  は断面変形に関する一般化外力、 $\bar{T}$  はねじりモーメントである。

弱形式の支配方程式 (10) から、強形式の支配方程式は

$$R_{13} g_1' + K_1 \varphi'' = 0 \quad (13)$$

$$-R_{11} g_1'' + R_{12} g_1 + R_{13} \varphi' = 0 \quad (14)$$

となる。

### 4. 非均質断面梁による検証

#### (1) 問題設定

図-2 に示す非均質断面の梁を解析対象として、提案した梁理論の精度を検証する。ともに等方弾性体の材料とし、材料 1 の Young 率とせん断弾性係数を  $E_1 = 200$  GPa、 $G_1 = 100$  GPa とし、材料 2 の Young 率とせん断弾性係数を  $E_2 = 20$  GPa、 $G_2 = 10$  GPa とした。

代表体積要素は 1 辺 2.5 mm の立方体形状の 6 面体 1 次アイソパラメトリック要素を用いてモデル化した。式 (1) で定義される本提案梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード  $f_i$  は、有限要素離散化した代表体積要素に単位の純ねじり変形を与えることで求める。このとき解析結果として得られる  $x_2, x_3$  各点の軸方向変位が  $f_i$  である。式 (11) に示すパラメータはこの  $f_i$  を用いて求める。なお、パラメータに含まれる  $f_i$  の偏導関数は、有限要素におけるひずみと同様の手順により要素内の物性評価点 (Gauss 点) で評価可能であり、面積分も Gauss 積分によって行った。

図-3 に示す片持ち梁の境界値問題を考え、通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする。本提案手法による数値解を参照解と比較してその精度・妥当性を評価する。長さ  $L = 1,000$  mm とし、自由端に強制変位がねじり角  $\varphi = 1.0$  rad とする。

比較対象としたソリッド要素によるモデルについて説明する。要素寸法は代表体積要素と同じく、1 辺 2.5 mm の立方体とした。固定端は断面内全ての節点を完全拘束し、ねじり角は  $u_1$  を拘束せず、断面内全ての節点に断面のねじり角が 1 となるような  $x_2, x_3$  方向の強制変位  $u_2 = -x_3 \varphi$ 、 $u_3 = x_2 \varphi$  を与えた。

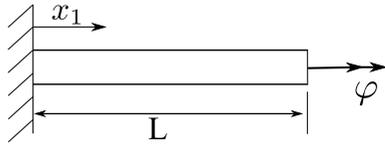


図-3 ねじり変位を受ける片持ち梁

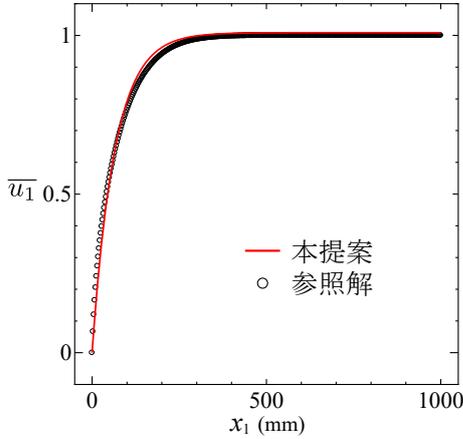


図-4 軸方向変位分布

表-1 軸方向変位の比較

	点 A
最大変位の相対差	$8.50 \times 10^{-3}$
$L^2$ ノルム相対差	$1.76 \times 10^{-2}$

## (2) 軸方向変位

図-2 に示す点 A (材料の変化点) における軸方向変位分布を図-4 に示す。縦軸の軸方向変位は参照解の最大軸変位で無次元化している。横軸は  $x_1$  座標である。固定端では断面のそりが拘束されているため軸方向変位は 0 だが、 $x_1 = 0$  から  $x_1 = 250$  にかけて急激に軸方向変位が生じ、それ以降では一定の分布を示している。本手法の軸方向変位分布は参照解とほぼ一致している。また最大変位と相対差を表-1 に示す。ここで  $L^2$  ノルムは、本手法による解  $\beta_p$  と参照解  $\beta_s$  との差の  $L^2$  ノルムを参照解の  $L^2$  ノルムで無次元化し

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \quad (15)$$

と定義した。最大変位の相対差は 0.8% 程度、 $L^2$  ノルム相対差は 2% 程度と定量的にも一致している。

## (3) 断面内のひずみ分布

そり変形による軸ひずみが比較的大きな  $x_1 = 200$  mm の断面において本手法と参照解によるひずみ分布を比較する。

本手法と参照解の軸ひずみ分布を図-5 に示す。同図 (a) は本手法による解、(b) は参照解である。本手法に

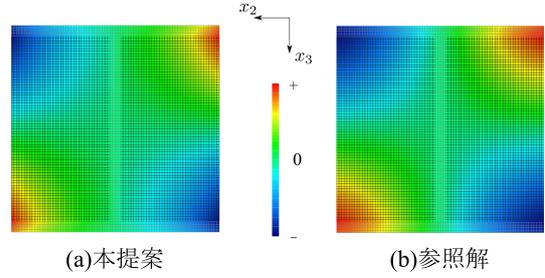


図-5 軸ひずみ  $\epsilon_{11}$  分布

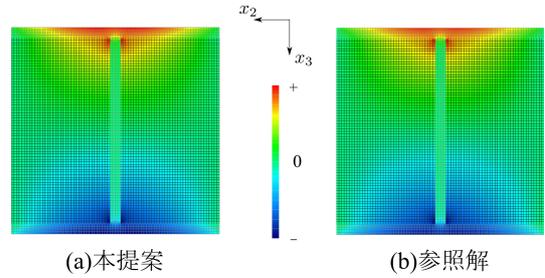


図-6 せん断ひずみ  $\gamma_{12}$  分布

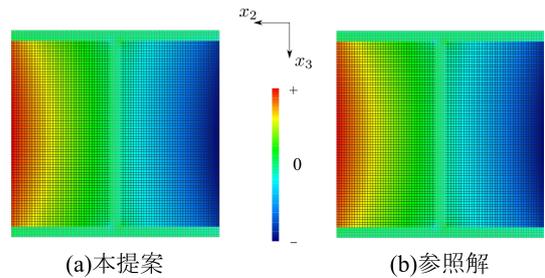


図-7 せん断ひずみ  $\gamma_{13}$  分布

よる解は式 (4) と代表体積要素の数値解析から求めた  $f_i(x_2, x_3)$  による。軸ひずみはねじり中心に対して点対称に生じている。本手法と参照解では material1 のフランジ上の分布にわずかに違いが見られるが、その他の分布は定性的に一致しているといえる。

本手法と参照解のせん断ひずみ  $\gamma_{12}$  分布を図-6 に示す。同図 (a) は本手法による解、(b) は参照解である。本手法による解は式 (5) と代表体積要素の数値解析から求めた  $f_i(x_2, x_3)$  による。せん断ひずみ  $\gamma_{12}$  は material1 のフランジだけでなく、material2 にもフランジで生じている最大ひずみと同程度のひずみが生じている。また本手法と参照解のひずみ分布は定性的に一致していることがわかる。

本手法と参照解のせん断ひずみ  $\gamma_{13}$  分布を図-7 に示す。同図 (a) は本手法による解、(b) は参照解である。本手法による解は式 (6) と代表体積要素の数値解析から求めた  $f_i(x_2, x_3)$  による。material1 では material2 に比べてほとんどひずみは生じていない。また本手法と参照解のひずみ分布は定性的に一致していることがわかる。

## 5. ねじりによる断面変形を組み込んだ有限要素の定式化

ねじりによる断面変形を有限要素に組み込んだ梁要素を提案する。一要素あたり2節点を持ち、各節点がそれぞれ  $(\varphi)_i^e, (g_t)_i^e$  の2自由度を持つ要素を考える。要素における梁のねじり角と断面変形の大きさは一次の内挿関数  $\psi_i$  を用いて

$$\check{\varphi}(x_1) = \psi_1(x_1)(\varphi)_1^e + \psi_2(x_1)(\varphi)_2^e \quad (16)$$

$$\check{g}_t(x_1) = \psi_1(x_1)(g_t)_1^e + \psi_2(x_1)(g_t)_2^e \quad (17)$$

と表す。上式を式(16), (17)をに代入すると要素におけるひずみ

$$\epsilon_{11} = f_t \sum_{i=1}^2 \psi_i'(g_t)_i^e \quad (18)$$

$$\gamma_{12} = f_{t,2} \sum_{i=1}^2 \psi_i(g_t)_i^e - x_3 \sum_{i=1}^2 \psi_i'(\varphi)_i^e \quad (19)$$

$$\gamma_{13} = f_{t,3} \sum_{i=1}^2 \psi_i(g_t)_i^e + x_2 \sum_{i=1}^2 \psi_i'(\varphi)_i^e \quad (20)$$

を得る。要素長  $l$  の1有限要素での仮想仕事式は

$$\int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\} dV = T_1\delta(\varphi)_1^e + T_2\delta(\varphi)_2^e + D_1\delta(g_t)_1^e + D_2\delta(g_t)_2^e \quad (21)$$

となる。上式に式(18), (19), (20)を代入し、離散化すると要素剛性方程式

$$\mathbf{K}_o \begin{pmatrix} (\varphi)_1^e \\ (g_t)_1^e \\ (\varphi)_2^e \\ (g_t)_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ D_1 \\ T_2 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

を得る。ここに、要素剛性行列  $\mathbf{K}_o$  は

$$\mathbf{K}_o := \begin{pmatrix} \frac{K_t}{l} & -\frac{R_{13}}{2} & -\frac{K_t}{l} & -\frac{R_{13}}{2} \\ & \frac{R_{11}}{l} + \frac{R_{12}}{3}l & \frac{R_{13}}{2} & -\frac{R_{11}}{l} + \frac{R_{12}}{6}l \\ \frac{K_t}{l} & \frac{R_{13}}{2} & -\frac{K_t}{l} & \frac{R_{13}}{2} \\ & -\frac{R_{11}}{l} + \frac{R_{12}}{6}l & \frac{R_{13}}{2} & \frac{R_{11}}{l} + \frac{R_{12}}{3}l \end{pmatrix} \quad (23)$$

である。

## 6. 解析解に対する収束の検証

### (1) 問題設定

図-3に示す片持ち梁の境界値問題を考え、長さ  $l = 1000$  mm, ねじり角  $\varphi = 1$  radとした。ねじりによる断面変形が発生する典型的な断面として、単一材料のH形断面を対象に有限要素の解析解に対する収束性を検証する。H断面の寸法は高さ  $h = 200$  mm, 幅  $b = 200$  mm, フランジ厚  $t_f = 10$  mm, ウェブ厚  $t_w = 10$  mmとした。材料は等方弾性体とし、Young率を  $E = 200$  GPa, せん断弾性係数を  $G = 100$  GPaとした。代表体積要素は

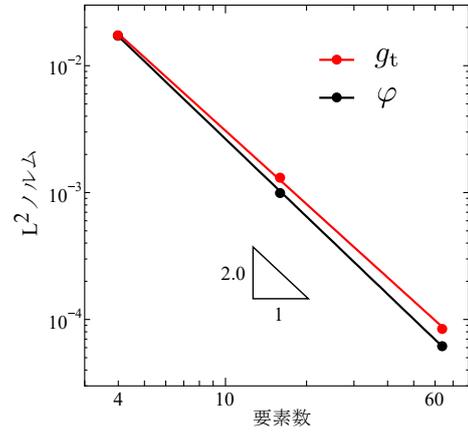


図-8  $L^2$  ノルム

1辺長さが2.5 mmの立方体形状の1次6面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。有限要素の要素数は4, 16, 64と変化させて解析を行った。本提案梁理論の解析解と比較して有限要素解の収束性を検証する。

### (2) 検証結果

要素分割数と、ねじり角および一般化変位の  $L^2$  ノルム相対差の関係を図-8に示す。ねじり角および一般化変位の  $L^2$  ノルム相対差の傾きはそれぞれ  $-2.03$ ,  $-1.92$  であり、梁要素が解析解に対して、良い収束性をもつことが確認できる。

## 7. まとめ

任意断面に適用可能なねじりによる断面変形を考慮可能な梁理論を構築した。非均質断面梁に対して本理論を適用し、連続体要素による数値解析結果を参照解とし、結果を比較した。その結果、本理論の軸方向変位が参照解と2%程度の差で一致することを示した。また、材料特性が異なる複合断面の複雑な断面のひずみ分布と定性的に一致していることを示した。

さらに、本提案理論から有限要素定式化を行った。解析解との比較から、定式化した梁要素が良い収束性を持つことを示した。

### 参考文献

- 1) V.Z. ウラソフ, 奥村敏恵 (訳): 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
- 2) Schulz, M. and Filippou, F. C.: Generalized warping torsion formulation, *Engineering Mechanics*, Vol.124, pp.339-347, 1998.
- 3) Gruttmann, F. and Wagner, W.: Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections, *Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, pp.865-889, 1999.
- 4) 齊木功, 鍵一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会論文集 A2, Vol.68, pp.I.161-I.169, 2012.
- 5) 齊木功, 鄭 勳: せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.

(2023年2月1日提出)