

Virtual Element Method の実構造物への適用に向けた基礎的検討

Fundamental study for application of Virtual Element Method to actual structures

藤本竜太*

Ryuta FUJIMOTO

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

The Virtual Element Method (VEM) is an approximate solution method for partial differential equations that does not require explicit definition of the displacement function in the elements. Because of this feature, VEM can handle polygonal and polyhedral elements, and has begun to attract attention as a generalization of the Finite Element Method. However, most of these studies are theoretical, and there are few studies on the application of VEM to real structures. In this study, we focus on the feature of VEM that can calculate elements with hanging nodes without any special processing, and apply VEM to models that change the roughness of the mesh division. As a result, we confirmed that the accuracy of the analysis using elements with hanging nodes is good.

Key Words: virtual element method, hanging node, polygonal mesh, mesh division

1. はじめに

Virtual Element Method (VEM) は Beirão *et al.*¹⁾ により提案された変位関数を要素内において陽に定義する必要がないという特徴をもった偏微分方程式の近似解法である。その特徴から多角形や多面体の要素を扱うことが可能であるため、有限要素法 (FEM) を一般化した手法として注目を集め始めており、最近では工学分野でも VEM に関する研究が行われている。しかし、その多くは理論に関するものであり、実構造物などへの適用に向けた研究は少ない。実用化に向けては構造解析において現在広く使われている FEM よりも VEM が優れている点を示す必要があるが、本研究では VEM が多角形要素を扱えることから hanging node をもつ要素についても特別な処理なく計算できることに着目し、FEM 解析で問題となることの多い、メッシュ分割の粗さを変化させるモデルに対して、hanging node を有する要素を活用したときの解析精度について検討した。

2. Virtual Element Method の構造

本章では Artioli *et al.*²⁾ による 2 次元の線形弾性問題を対象とした定式化を用いて VEM の構造を示す。

(1) 支配方程式

連続した領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において、 Ω 上で物体力 f が作用する線形弾性境界値問題を考える。領域の境界 Γ は Dirichlet 境界 Γ_D と Neumann 境界 Γ_N から構成される。つり合い式、適合条件式、線形弾性体の構成式は Voigt 表記を用いると、それぞれ

$$\partial^T \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\varepsilon(u) = \partial u \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\sigma = C \varepsilon \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 ∂ は微分作用素、 u は変位ベクトル、 σ は Cauchy 応力、 ε は微小ひずみ、 C は弾性係数を表す。また、境界条件は次のようになる。

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D \quad (4)$$

$$t := m\sigma = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_N \quad (5)$$

ここで、 m は外向き単位法線ベクトル $n = \{n_x, n_y\}^T$ の Voigt 表記による行列である。これらに仮想仕事の原理を適用することで、支配方程式は次式で表す弱形式として与えられる。

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (6)$$

ここで、 $\mathcal{V} := (\mathcal{H}_0^1(\Omega))^2$ は可容変位場であり、 a 、 L は

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(v)^T C \varepsilon(u) d\Omega \quad (7)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} v^T f d\Omega + \int_{\Gamma_N} v^T \bar{t} d\Gamma_N \quad (8)$$

である。

(2) Virtual Element Method の定式化

まず、領域 Ω を重なりのない任意形状の多角形 E により分割する。このとき、多角形 E を要素と呼び、 E の辺 e の数を m で表す。また、 $\mathcal{V}^h(E)$ は要素ごとに定義される離散化された可容変位場であり、

$$\mathcal{V}^h(E) = \left\{ v^h \in H^1(E) \mid \Delta v^h \in \mathcal{P}_{k-2}(E), \right. \\ \left. v^h|_e \in \mathcal{P}_k(e) \quad \forall e \in \partial E \right\} \quad (9)$$

で定められるスカラー空間 $\mathcal{V}^h(E)$ により、 $\mathcal{V}^h(E) = [\mathcal{V}^h(E)]^2$ として定義される。ここで、 Δ はラプラシアン、 $\mathcal{P}_k(E)$ は要素 E 上で定義される k 次以下の多項式空間を

表す. 要素 E は, 各頂点において変位 \mathbf{v}^h に関する 2 個の自由度, 頂点を除く各辺上の点において変位 \mathbf{v}^h に関する $2(k-1)$ 個の自由度, さらに要素内においてモーメント $\frac{1}{|E|} \int_{\Omega_E} \mathbf{v}^h \phi_i d\Omega_E$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{k(k-1)}{2}$) に関する $2\frac{k(k-1)}{2}$ 個の自由度を有する. ここで, $|E|$ は要素 E の面積, ϕ_i は $\mathcal{P}_{k-2}(E)$ の基底 $\{x^\alpha y^\beta \text{ with } \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha + \beta \leq k-2\}$ の元を示す. したがって, m 角形要素 E における空間 $\mathcal{V}^h(E)$ の次元 n は

$$n = \dim(\mathcal{V}^h(E)) = 2mk + k(k-1) \quad (10)$$

となる. 次に,

$$\begin{aligned} \Pi^d : \mathcal{V}^h(E) &\rightarrow \mathcal{P}_k(E) \\ \mathbf{v}^h &\mapsto \Pi^d \mathbf{v}^h \end{aligned} \quad (11)$$

で定義される射影作用素 Π^ε を導入する. ここで, $\mathcal{P}_k(E) := [\mathcal{P}_k(E)]^2$ は要素 E 上で定義される k 次以下の多項式空間である. また, \mathbf{u}^h に Π^d を作用させた関数 $\Pi^d \mathbf{u}^h$ は任意の関数 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E)$ に対して, 直交条件

$$a_E(\mathbf{u}^h - \Pi^d \mathbf{u}^h, \mathbf{p}) = 0 \quad (12)$$

を満足するものと定めると, $\Pi^d \mathbf{u}^h$ は多項式空間 $\mathcal{P}_k(E)$ 上における変位 $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h(E)$ の最良近似となり, 要素 E における内部仮想仕事は

$$a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = a_E(\Pi^d \mathbf{u}^h, \Pi^d \mathbf{v}^h) + a_E(\mathbf{u}^h - \Pi^d \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi^d \mathbf{v}^h) \quad (13)$$

と表せる. 右辺の第 1 項を整合項, 第 2 項を安定化項と呼ぶ.

以下では, $k=1$ の場合についての整合項と安定化項の定式化について述べる. このとき, m 角形要素に対する $\mathcal{V}^h(E)$ の次元数は $2m$ となる.

(3) 整合項の定式化

まず, 任意の関数 $\boldsymbol{\varepsilon}^p \in \mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ に対して

$$\int_{\Omega_E} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) - \Pi^\varepsilon(\mathbf{u}^h))^T \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (14)$$

を満足する射影作用素 $\Pi^\varepsilon : \mathcal{V}^h(E) \rightarrow \mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ を用いることで, 式 (13) の整合項は

$$a_E(\Pi^d \mathbf{u}^h, \Pi^d \mathbf{v}^h) = \int_{\Omega_E} [\Pi^\varepsilon(\mathbf{v}^h)]^T \mathbf{C} \Pi^\varepsilon(\mathbf{u}^h) d\Omega_E \quad (15)$$

と表せる. $\Pi^\varepsilon(\mathbf{u}^h)$ は 0 次の多項式空間 $\mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ におけるひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)$ の最良近似となる関数で, $\mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ の基底 \mathbf{N}^p を用いて

$$\Pi^\varepsilon(\mathbf{v}^h) = \mathbf{N}^p \boldsymbol{\pi}^\varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \quad (16)$$

と表せる. ここで, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{2m}$ は $\mathcal{V}^h(E)$ の基底 \mathbf{N}^p で表した変位 $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h(E)$ の節点変位ベクトルで, $\boldsymbol{\pi}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 2m}$ は $\mathcal{V}^h(E)$ から $\mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ への基底変換を表す行列であ

る. また, 多項式空間 $\mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ は

$$\mathcal{P}_0(E)_{\text{sym}}^{2 \times 2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (17)$$

で表される次元数 3 の空間であるため, その基底 \mathbf{N}^p は

$$\mathbf{N}^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる. 式 (16) を式 (14) に代入して式を変形すると,

$$\boldsymbol{\pi}^\varepsilon = \mathcal{G}^{-1} \mathcal{B} \quad (19)$$

が得られる. ここで, \mathcal{G}, \mathcal{B} はそれぞれ

$$\mathcal{G} = \int_{\Omega_E} (\mathbf{N}^p)^T \mathbf{N}^p d\Omega_E \quad (20)$$

$$\mathcal{B} = \int_{\Gamma_E} (\mathbf{m} \mathbf{N}^p)^T \mathbf{N}^v d\Gamma_E \quad (21)$$

である. 式 (19) と式 (16) から, $\Pi^\varepsilon(\mathbf{v}^h)$ は

$$\Pi^\varepsilon(\mathbf{v}^h) = \mathbf{N}^p \mathcal{G}^{-1} \mathcal{B} \tilde{\mathbf{v}} \quad (22)$$

となり, 式 (15) の整合項は

$$a_E(\Pi^d \mathbf{u}^h, \Pi^d \mathbf{v}^h) = (\tilde{\mathbf{v}})^T \mathbf{K}_C \tilde{\mathbf{u}} \quad (23)$$

と表せる. \mathbf{K}_C は整合項の剛性行列で

$$\mathbf{K}_C = \mathcal{B}^T \mathcal{G}^{-1} \left[\int_{\Omega_E} (\mathbf{N}^p)^T \mathbf{C} \mathbf{N}^p d\Omega_E \right] \mathcal{G}^{-1} \mathcal{B} \quad (24)$$

である. 式 (24) より, \mathbf{K}_C を求めるにおいて, 変位 $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h(E)$ の内挿関数 \mathbf{N}^p は式 (21) の境界積分にしか現われないことから, VEM では変位の内挿関数を要素辺上だけに定義すれば良く, 要素内では陽に定める必要がないことがわかる. このことが “Virtual” Element Method という名の所以となっている.

(4) 安定化項の定式化

式 (13) の右辺第 2 項の安定化項は厳密に計算することができないため, 次のような近似を用いた定式化を行う.

まず, 多項式空間 $\mathcal{P}_1(E)$ は要素の直径により無次元化された要素の重心座標 ξ, η を用いて

$$\mathcal{P}_1(E) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} \right\} \quad (25)$$

で表される次元数 6 の空間であることから, その基底 \mathbf{N}^d を用いて, 式 (11) で定義される $\mathcal{P}_1(E)$ 上の変位関数 $\Pi^d \mathbf{u}^h$ は

$$\Pi^d \mathbf{u}^h = \mathbf{N}^d \hat{\mathbf{u}}^c \quad (26)$$

と書ける. また, $\mathcal{P}_1(E) \subset \mathcal{V}^h(E)$ であることから, $\mathcal{V}^h(E)$ の基底 N^V を用いて

$$\Pi^d \mathbf{u}^h = N^V \tilde{\mathbf{u}}^c \quad (27)$$

とも表せる. ここで, $\hat{\mathbf{u}}^c \in \mathbb{R}^6$, $\tilde{\mathbf{u}}^c \in \mathbb{R}^{2m}$ はそれぞれの基底で表した整合項による変位 $\Pi^d \mathbf{u}^h$ のベクトルである. $\mathcal{P}_1(E)$ から $\mathcal{V}^h(E)$ への基底変換を表す行列 $D: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ を導入すると

$$D\hat{\mathbf{u}}^c = \tilde{\mathbf{u}}^c \quad (28)$$

となることから, 整合項による解 $\tilde{\mathbf{u}}^c$ は $\text{Im}D$ である. ここで, D は縦長フルランク行列とすると $\mathbf{u}^h = N^V \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}^h(E)$ の $\tilde{\mathbf{u}}$ が存在する \mathbb{R}^{2m} は

$$\mathbb{R}^{2m} = \text{Im}D \oplus \text{Im}\left(I - D(D^T D)^{-1} D^T\right) \quad (29)$$

と直交直和分解でき, さらに $\tilde{\mathbf{u}}^c \in \text{Im}D$ であるため, 安定化項の解 $\tilde{\mathbf{u}}^s$ は $\text{Im}(D(D^T D)^{-1} D^T)$ に存在することになる. このことを用いて, 安定化項の剛性行列 K_S を

$$K_S := \tau \left(I - D(D^T D)^{-1} D^T \right) \quad (30)$$

と定めて, 安定化項を

$$a_E(\mathbf{u}^h - \Pi^d \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi^d \mathbf{v}^h) \approx (\mathbf{v}^h)^T K_S \mathbf{u}^h \quad (31)$$

と定義する. ここで, τ はひずみエネルギーの大きさを調整するためのパラメータで, 安定化パラメータと呼ぶ.

3. 精度検証 1

図-1 のような自由端でせん断荷重を受ける非常に短い片持ち梁の問題について, 図-2 のようにサイズの異なる要素を直接繋げたモデルによる VEM 解析を行い, hanging node においてせん断変形を表現できるかを調べた. モデル i ($i = 1, 2, 4, 5, 10, 20$) は固定端 ($x = 0$) から軸方向の半分の長さ ($x = 2$) までの領域は全てのモデルで固定端辺が 40 分割される大きさの正方形要素で細かく分割し, $x = 2$ から自由端 ($x = 4$) までの領域は自由端辺の分割数が $2i$ となる大きさの正方形要素で粗く分割している. 以後, 細かい分割領域における要素を小要素, 粗い分割領域における要素を大要素と呼ぶ. モデル i の小要素と直接接続している大要素は, 1 辺の長さが小要素の $\frac{20}{i}$ 倍であり, 小要素と共有する辺において $(\frac{20}{i} - 1)$ 個の hanging node をもつ.

各辺を 20 分割した要素数 40,000 のモデルに対する Nx Nastran による結果を参照解として, モデル 1 の小要素と大要素が接続されている $x = 2$ の節点の x 方向の変位 u_x を図-3 に示す. 図から, 大要素の角部にあたる $y = 0$ と $y = 4$ の節点における VEM の結果は参照解との誤差が 13.7% と大きいものの, hanging node における変位は参照解との誤差が最大でも 2.4% と精度よ

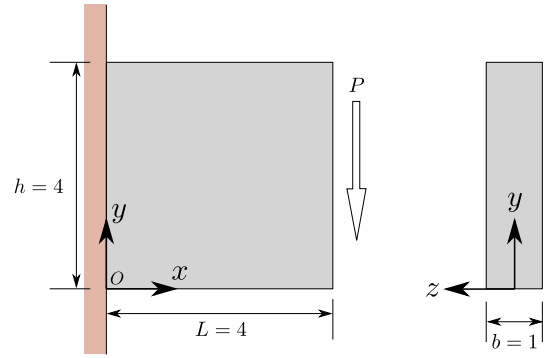


図-1 せん断荷重を受ける非常に短い片持ち梁

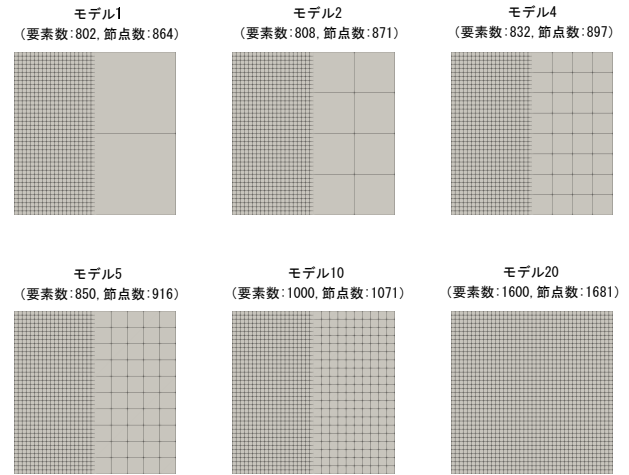


図-2 解析モデル

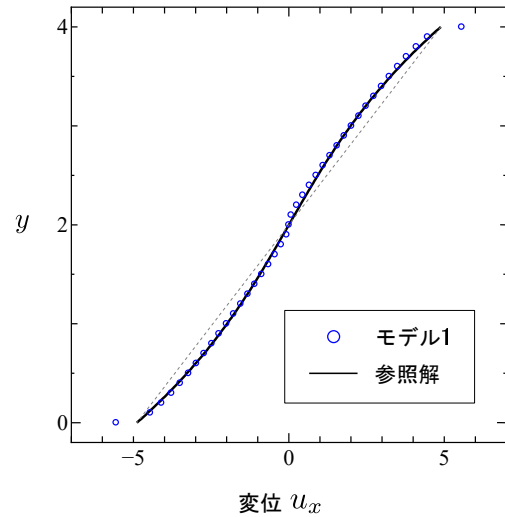


図-3 モデル 1 の $x = 2$ における x 方向変位 u_x

く求められている. 他のモデルにおいても大要素の角部にあたる節点で参照解との誤差が最も大きくなるが, hanging node においては良い精度の変位が得られた. また, 大要素の角部における誤差に関しても, 接続する要素の大きさの比を小さくすることで誤差は小さくなり, 接続する要素の大きさが 5 倍となるモデル 4 では 0.9% 程度となった.

4. 精度検証 2

図-4 に示す中央に円孔を有する平板に面内方向の引張荷重を作用させる問題について、応力集中が生じる箇所のみ局所的に細かく分割したモデルを用いて VEM 解析を行い、メッシュ分割の粗さを急に変えたモデルを用いたときの応力の解析精度を検証するため、円孔周辺の細かく分割する領域の範囲を変えた A, B, C の 3 群のモデルを用意した。モデル A が細かく分割する領域が最も狭く、次に狭いのが B で、C は平板の領域全体を細かく分割している。また、モデル A と B は周方向の分割数を 16, 32, 64, 80, 96, 128 分割のそれぞれ 6 パターン、モデル C は周方向の分割数を 32, 64, 80, 96 分割の 4 パターンにより解析を行った。周方向の分割数を 80 として領域全体を細かく分割したプレート要素のモデル（要素数 2,212）による Nx Nastran の結果を参照解とした。

解析結果として、周方向に 80 分割したモデル A による y 方向の直応力 σ_y の分布を図-5 に示す。グラフは $x=0$ および $y=0$ における結果を示し、実線は参照解による結果を表している。図からは、細かい分割領域においては VEM 解析により参照解と重なるような結果が得られているが、最大値に着目すると参照解を 1.000 としたとき、VEM は 0.945 となった。

次に、周方向の分割数は一定で細かく分割する領域を $A \rightarrow B \rightarrow C$ と広げていったときの節点数と応力 σ_y の最大値の参照解との相対誤差の関係を図-6 に示す。細分割領域を広げることで誤差は小さくなるものの、節点数が 2.8 倍増加しても精度は 1% 程度の向上に留まっている。

また、細分割する領域の範囲は一定で周方向の分割数を増やしたときの周方向の分割数と応力 σ_y の参照解との相対誤差の関係を図-7 に示す。周方向の分割数がある程度まで増えると解析精度はほとんど変わらなくなるが、モデル A・B の両方において周方向の分割数を 128 まで増やすと 80 分割や 96 分割のときよりも解析精度が 0.1% 程度低下する結果となった。これは、細かい分割領域の要素のサイズと粗い分割領域の要素のサイズの比が大きすぎることによる影響だと考えられる。周方向に 128 分割したモデルでは、粗い分割領域の 1 個の要素に対して細かい分割領域の要素が 8 個接続されている。

これらのことから、VEM 解析を用いて応力集中の生じる箇所における応力を調べたい場合には、応力集中の生じる領域のみを局所的に細かく分割したモデルで、全体を細かく分割したモデルと同程度の精度の応力を求めることができるが、分割粗さが変化する箇所の要素サイズの比が 8 以上になると解析精度の低下が生じてしまうことがわかった。

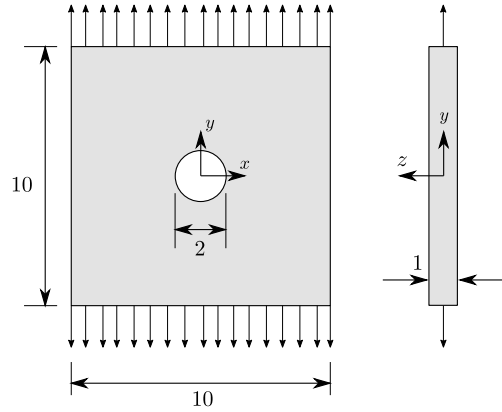


図-4 円孔を有する平板の引張問題

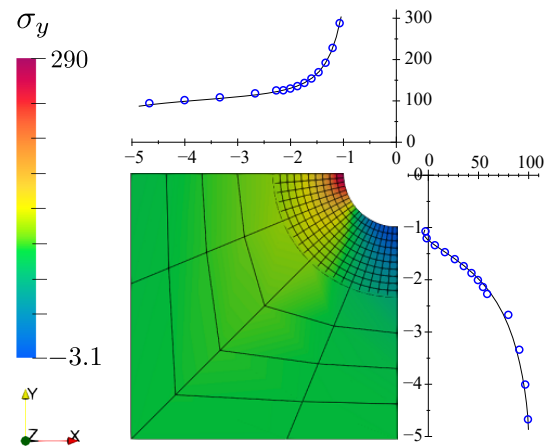


図-5 周方向に 80 分割したモデル A の応力 σ_y の分布

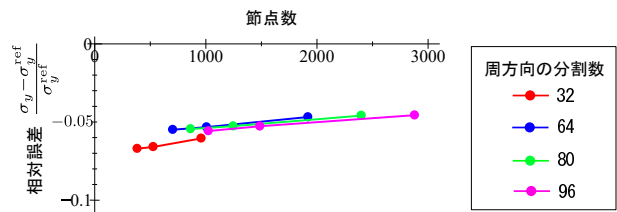


図-6 細かい分割領域を広げたときの解析精度の変化

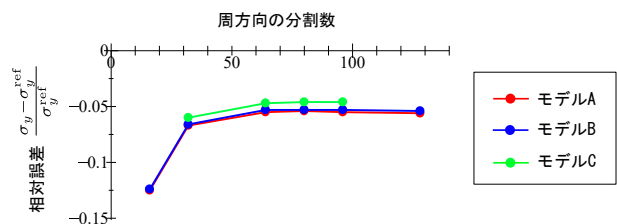


図-7 周方向の分割数と解析精度の関係

参考文献

- 1) Beirão, V.L., Brezzi, F., Cangiani, A., Manzini, G., Marini, L.D., Russo, A.: Basic principles of virtual element methods, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23(01), pp.199-214, 2013.
- 2) Artioli, E., Beirão, V.L., Lovadina, C., Sacco, E.: Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes: part I, elastic problem, *Comput. Mech.*, 60(3), pp.355-377, 2017.

(2023 年 2 月 1 日 提出)