

相反定理に基づく 効率的な影響線の有限要素解析手法の提案と 鋼床版の疲労寿命評価への適用

Efficient influence line analysis of finite element models
based on the reciprocal theory
and fatigue evaluation of an orthotropic steel deck

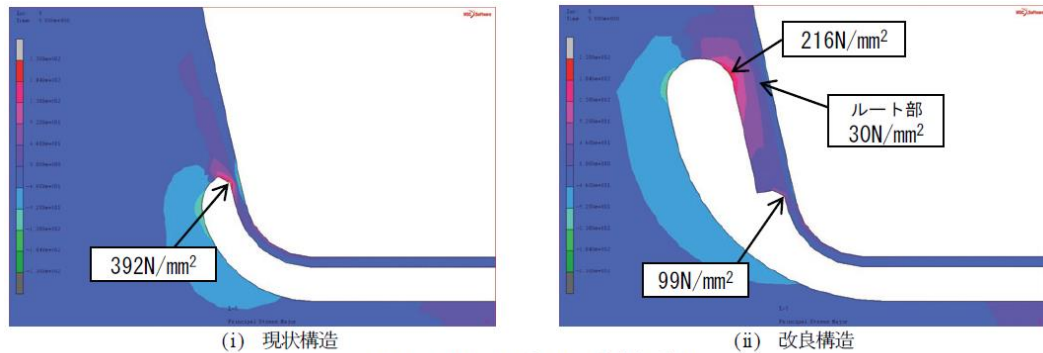
構造強度学研究室
三井 涼平

鋼床版の需要が高まっているが、リブ溶接部において疲労損傷が生じやすく、疲労耐久性の確保が重要である。

鋼床版の疲労耐久性向上を試みる取り組みが盛んに行われている！

杉山ら (2014年)

構造ディテールを変更して耐久性向上を試みた



横関ら (2017年)

疲労寿命100年を有する鋼床版を開発



鋼床版のさらなる発展のためにも

効率的な疲労耐久性の評価手法を確立していく必要がある

影響線：着目点の応力等の応答を荷重載荷位置で表した関数

移動荷重による局所的な応力を効率的に把握するために必要不可欠

3次元有限要素モデルに対してはあまり用いられていない！

森ら(2017年)

車両走行位置による応力低減を検討するため、**1000点以上に対して有限要素解析**を実行。

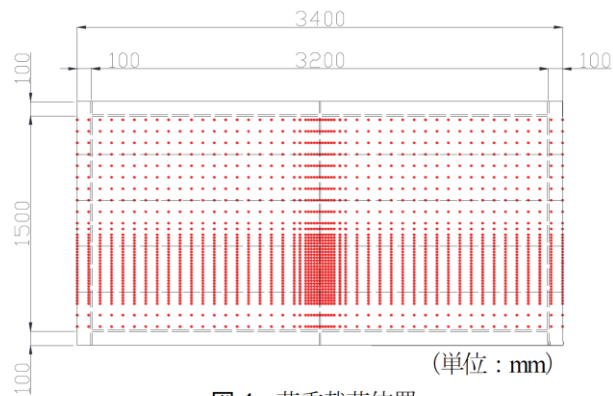
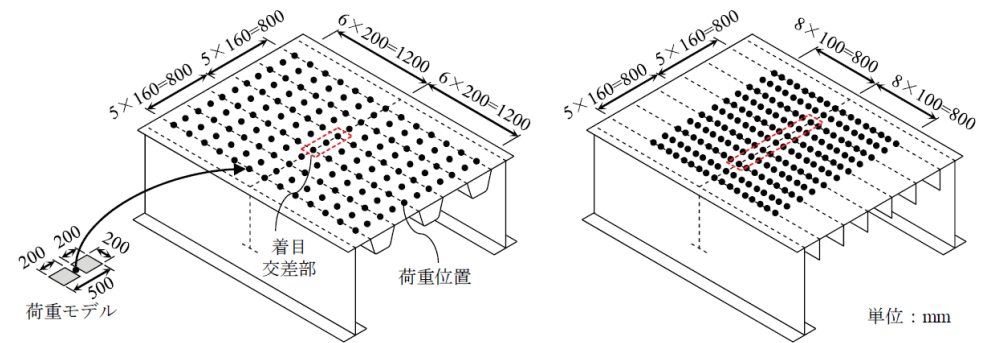


図4 荷重載荷位置

横関ら(2017年)

疲労耐久性評価のために、100~200mm間隔の限定した**803ケースに対して有限要素解析**を実行。



(a)モデルUS, UN, VNに対する荷重位置

(b)モデルPS, PNに対する荷重位置

図5 載荷位置

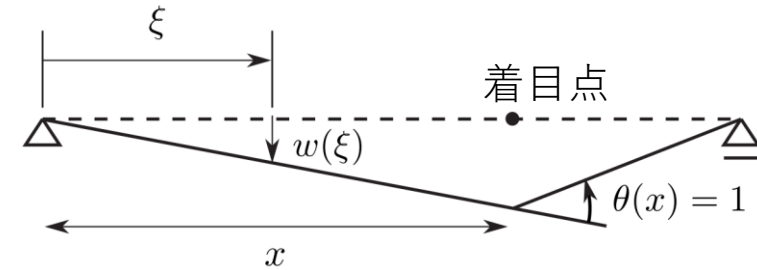
影響線の可視化には、着目点の応答を床版面に関連付ける必要もある

Muller-Breslauの原理：相反定理を応用した影響線の解析手法

着目点の曲げモーメントの影響線

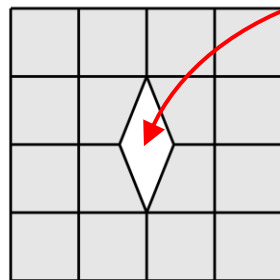
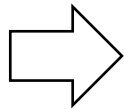
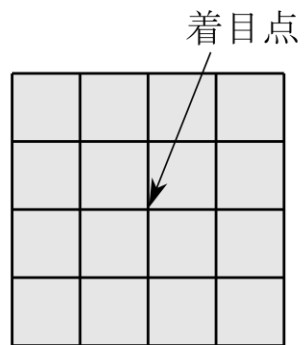
||

着目点に単位の回転角を与えたときのたわみ曲線



位置 ξ に単位荷重が作用 \Rightarrow 着目点には $w(\xi)$ だけ曲げモーメントが生じる

古市ら(2009年)は、3次元有限要素モデルに対してこの原理を適用



着目点でモデルを切り離す

1つの着目点に対して1度の解析を実行するだけでよいが、
不連続な変位を与えるためにモデル修正が必要！

➤ 影響線解析手法の比較

	計算コスト	影響線の可視化	モデルの修正	汎用FEAコードへの実装
単位荷重	× 荷重作用面の節点と 同数の解析が必要	△ 追加作業が必要	○	○
Muller-Breslau の原理	○	○	× 着目点ごとに必要	○
adjoint法	○	○	○	× 適していない
本提案手法	○ 着目点ごとに1回だけ	○ 作業は不要	○ 不要	○ 荷重を載荷するだけ

モデルの修正が不要で、汎用有限要素解析コードへの
実装が容易な影響線の解析手法を提案する

相反定理

線形弾性体であれば2つの系の内力補仮想仕事が等しくなることから、**2つの系の外力補仮想仕事が等しくなる**

$$\int_V u^1 q^2 dV = \int_V u^2 q^1 dV \quad \text{ここに, } u^i, q^i \text{ はそれぞれ系 } i \text{ での変位と外力}$$

➤ たわみの影響線

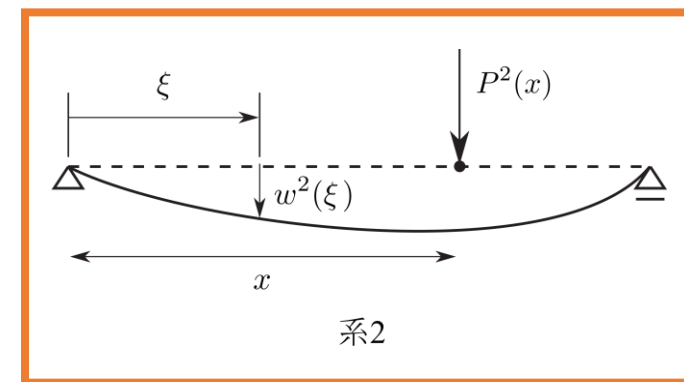
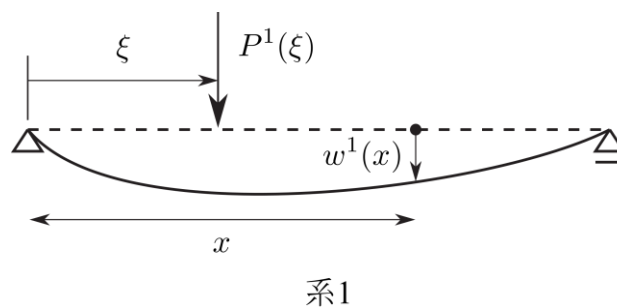
相反定理

$$w^1(x; \xi) P^2(x) = w^2(\xi; x) P^1(x)$$



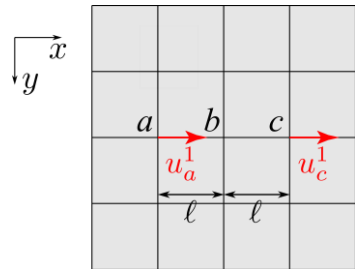
荷重の大きさを単位とすると

$$w^1(x; \xi) = w^2(\xi; x)$$



着目点のたわみの影響線は、着目点に単位荷重が作用するときのたわみ

➤ 節点におけるひずみの定義




節点 b のひずみ := 節点 a, b, c の変位を2次関数で内挿したときの節点 b における傾き

$$(\epsilon_x)_b = \frac{-u_a}{2l} + \frac{u_c}{2l}$$

➤ ひずみの影響線

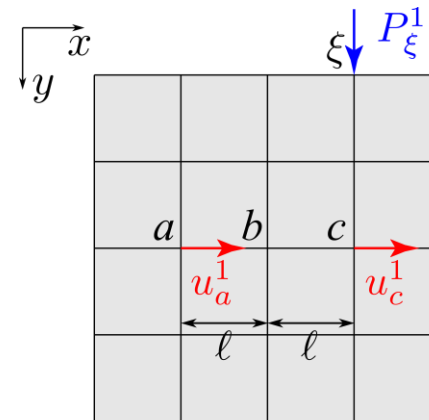
相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$

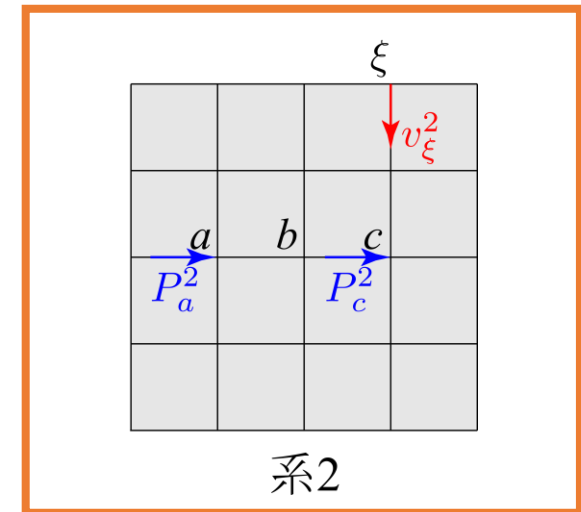


$$P_a^2 = -\frac{1}{2l}, \quad P_c^2 = \frac{1}{2l}$$

$$\frac{-u_a}{2l} + \frac{u_c}{2l} = (\epsilon_x)_b = v_\xi^2$$



系1



系2

系2の変位 v_ξ^2 が
節点 b におけるひずみの影響線となる

➤ 線形問題の応力とひずみの関係

平面応力状態の構成関係

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1-\nu^2} + \frac{\nu E\epsilon_y}{1-\nu^2} \quad \text{ここに, } E \text{ はYoung率, } \nu \text{ はPoisson比}$$

➤ 応力の影響線

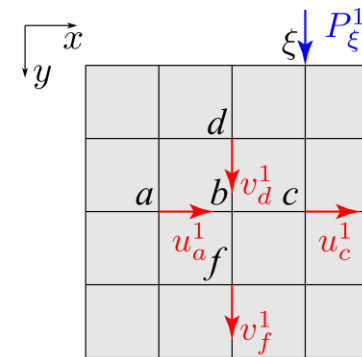
相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_c^1 P_c^2 + v_d^1 Q_d^2 + v_f^1 Q_f^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$

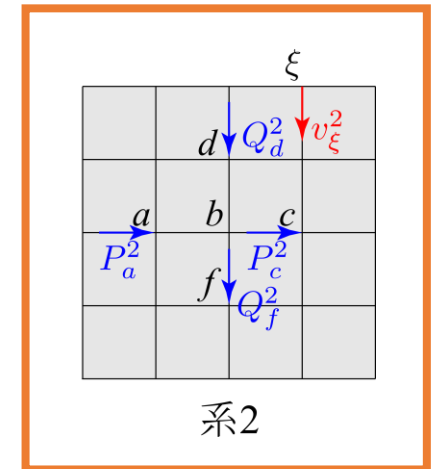
↓

$$-P_a^2 = P_c^2 = \frac{E}{2l(1-\nu^2)}, \quad -Q_d^2 = Q_f^2 = \frac{\nu E}{2l(1-\nu^2)}$$

$$\frac{u_c^1 - u_a^1}{2l} \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{v_f^1 - v_d^1}{2l} \frac{\nu E}{1-\nu^2} = \frac{E(\epsilon_x)_b}{1-\nu^2} + \frac{\nu E(\epsilon_y)_b}{1-\nu^2} = (\sigma_x)_b = v_\xi^2$$



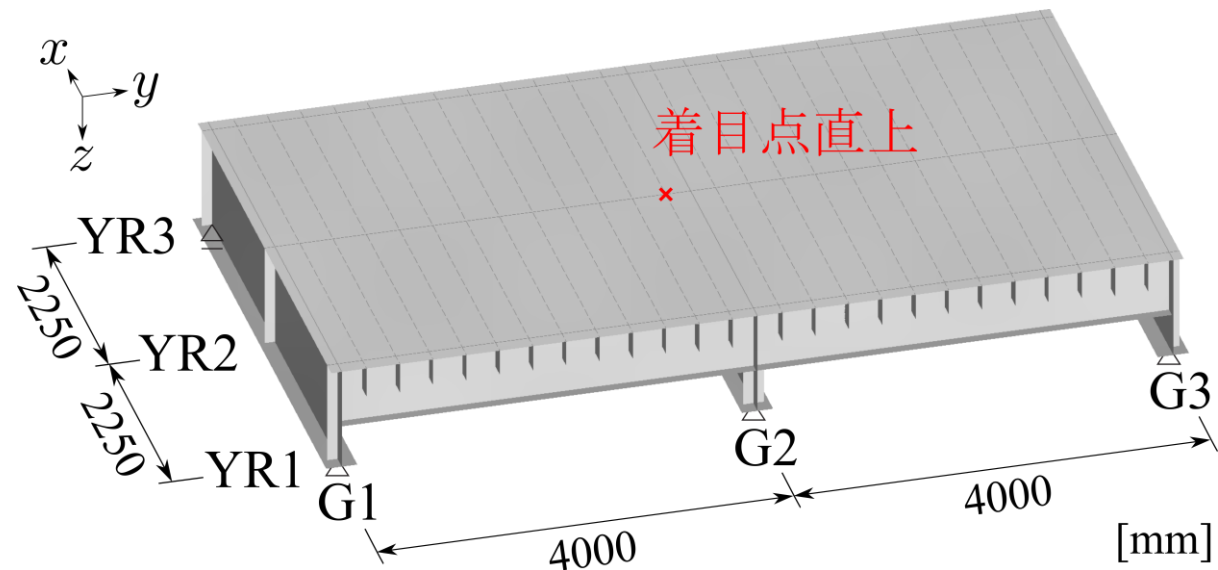
系1



系2

複数成分のひずみの影響線を重ね合わせることで応力の影響線が得られる

鋼床版の部分モデル

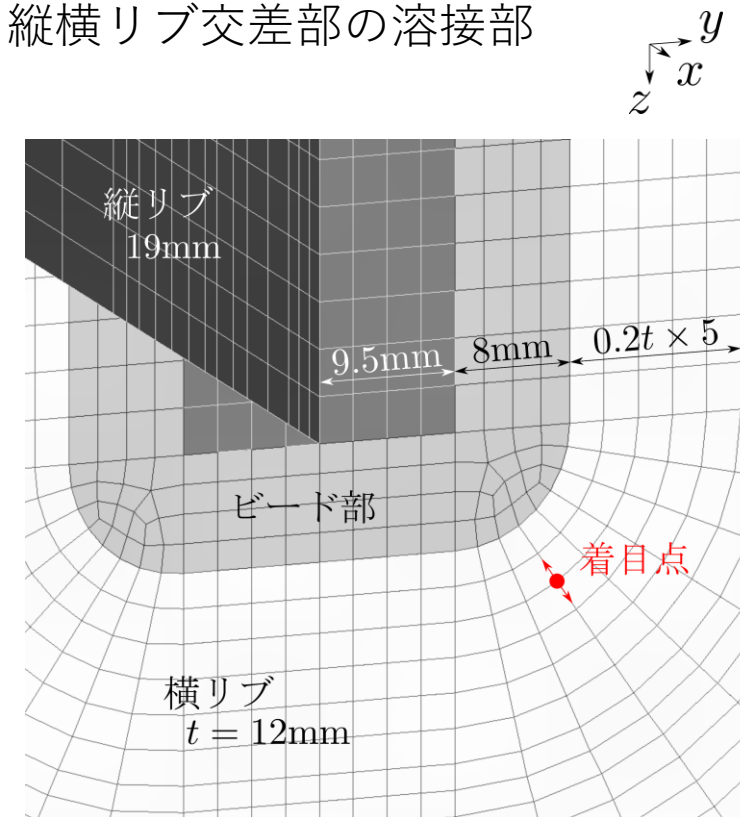


平面シェル要素
1,216,498要素
1,215,775節点

Young率	200GPa
Poisson比	0.3

着目点

縦横リブ交差部の溶接部

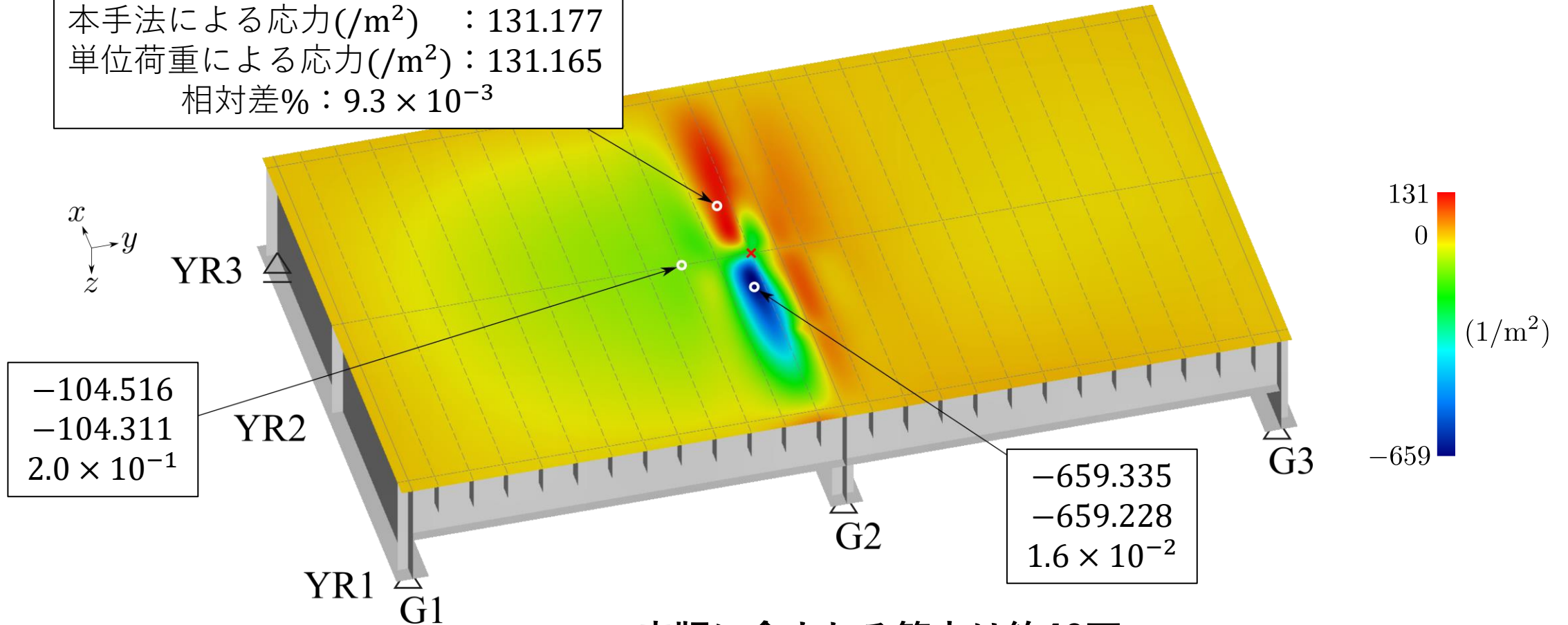


溶接止端直角方向の応力で比較

➤ 応力の影響線

0.1%程度の精度で一致

本手法による応力(/m²) : 131.177
単位荷重による応力(/m²) : 131.165
相対差% : 9.3×10^{-3}



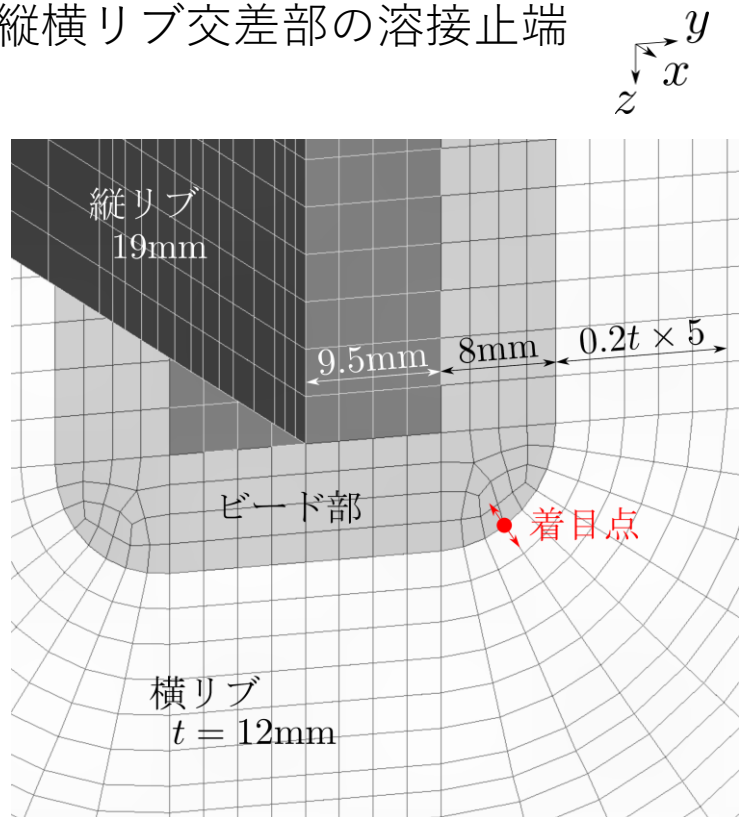
相対差 = $\frac{\text{本手法による解} - \text{単位荷重による解}}{\text{単位荷重による解}}$

床版に含まれる節点は約40万

⇒ 従来は約40万回の有限要素解析が必要！

着目点

縦横リブ交差部の溶接止端



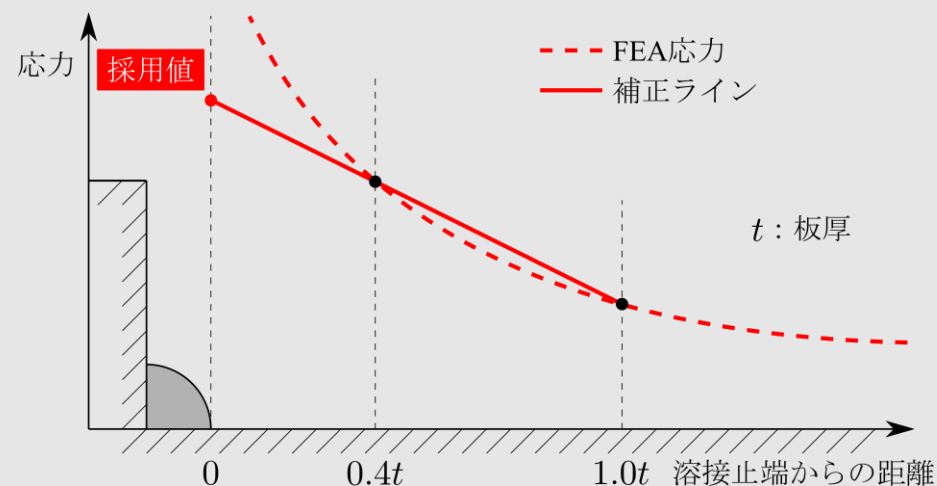
溶接止端直角方向の応力で評価

➤ 溶接止端の応力

構造ホットスポット応力¹⁾

$$\sigma_h = 1.67\sigma_{0.4t} - 0.67\sigma_{1.0t}$$

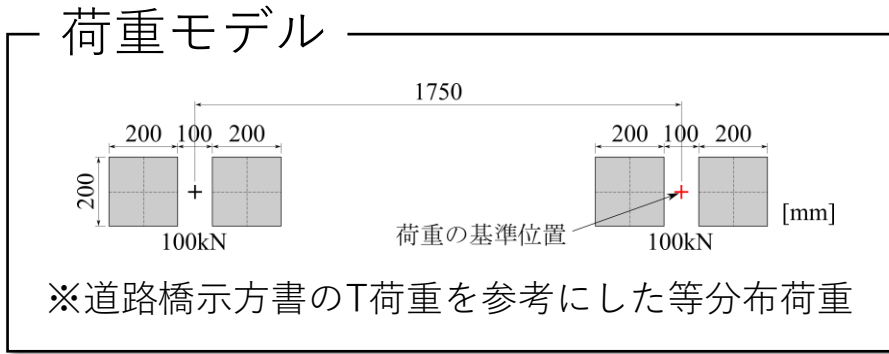
ここに、 $\sigma_{0.4t}$ 、 $\sigma_{1.0t}$ は溶接止端から $0.4t$ 、 $1.0t$ 離れた位置の応力



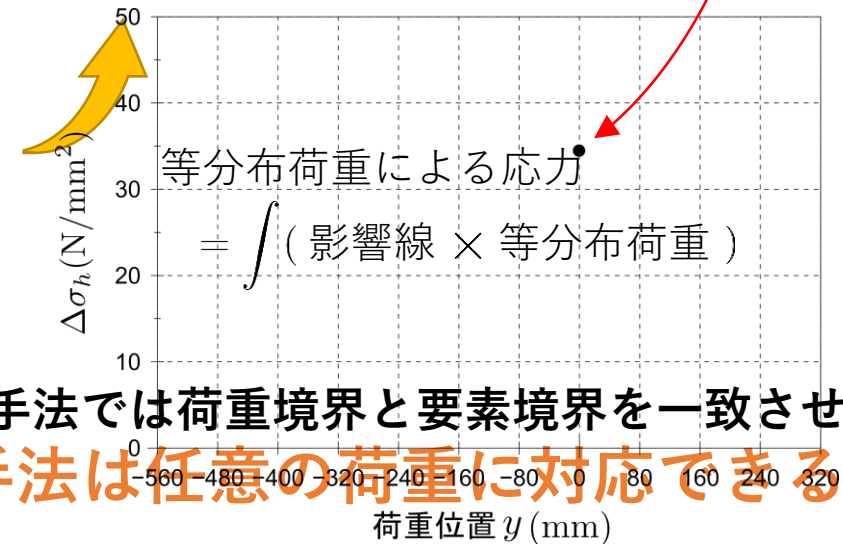
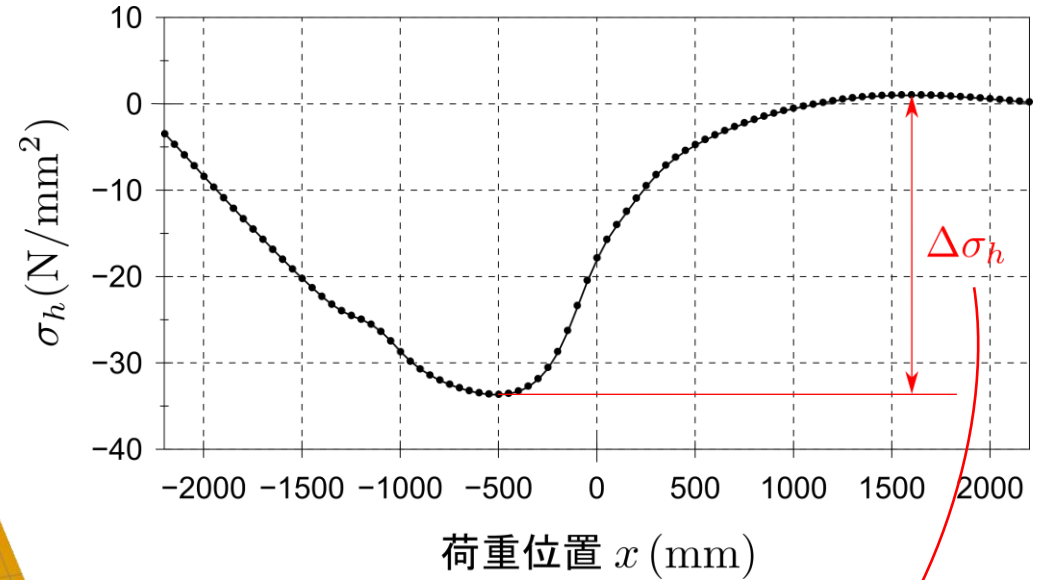
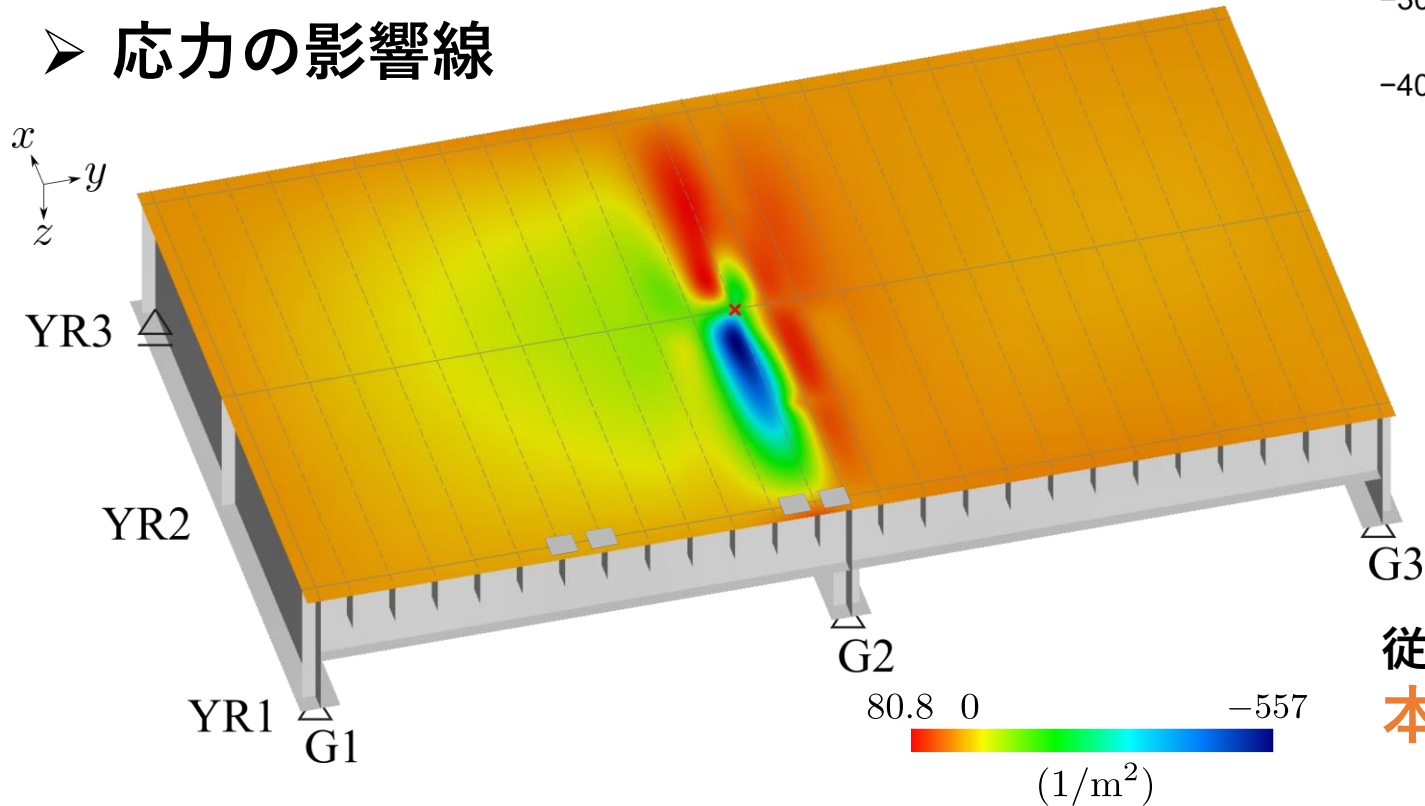
構造ホットスポット応力は応力の線形結合

⇒ 一度の解析で影響線を求めることができる

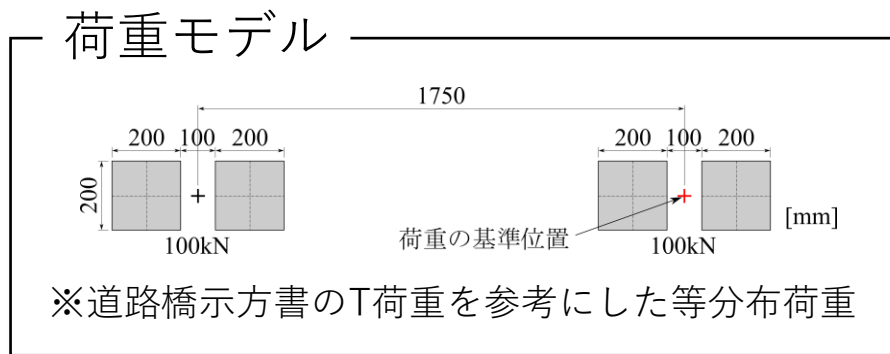
1) 日本鋼構造協会：鋼構造物の疲労設計指針・同解説，技報堂出版，2012.



➤ 応力の影響線

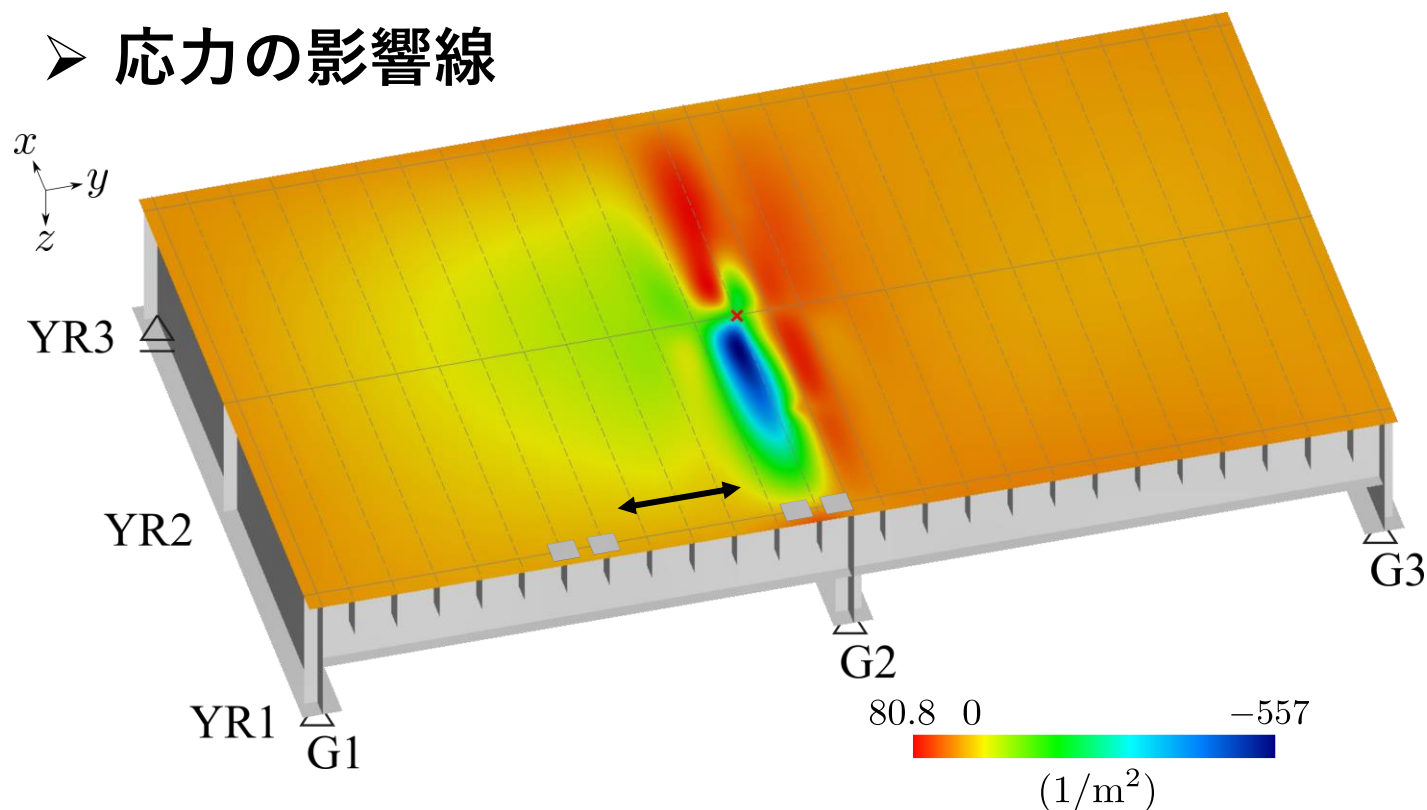


従来手法では荷重境界と要素境界を一致させる
本手法は任意の荷重に対応できる！

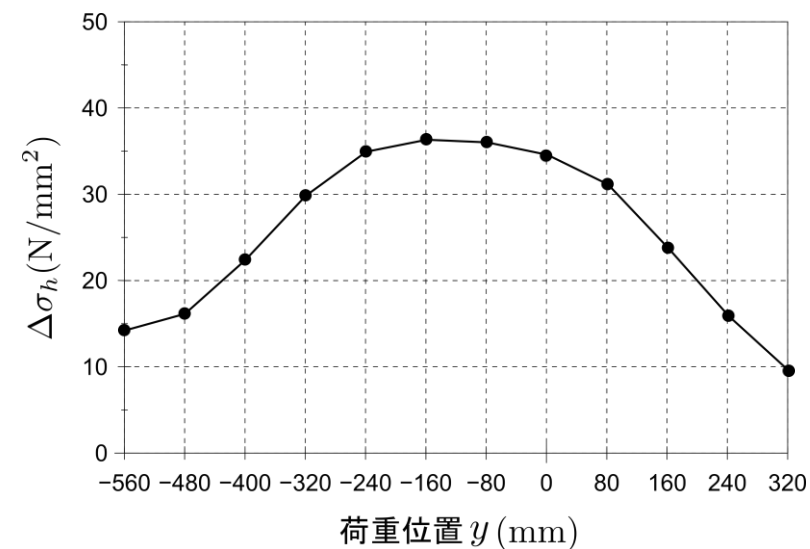


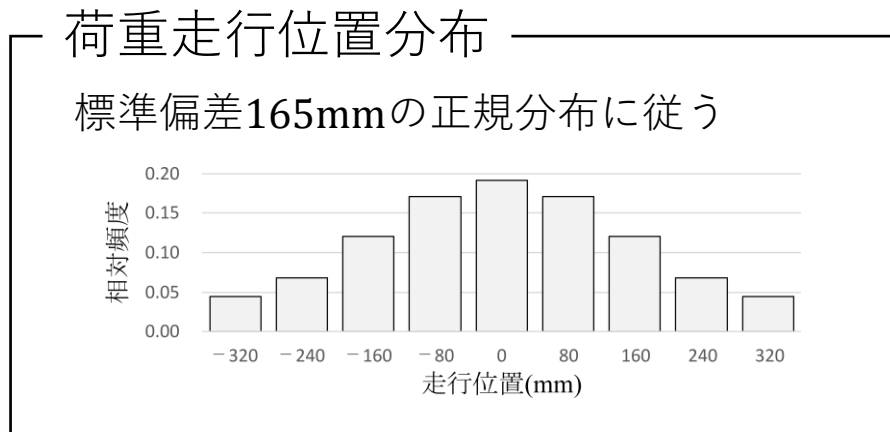
従来は1068ケースに対する解析が必要
本手法では一度の有限要素解析だけ！

➤ 応力の影響線

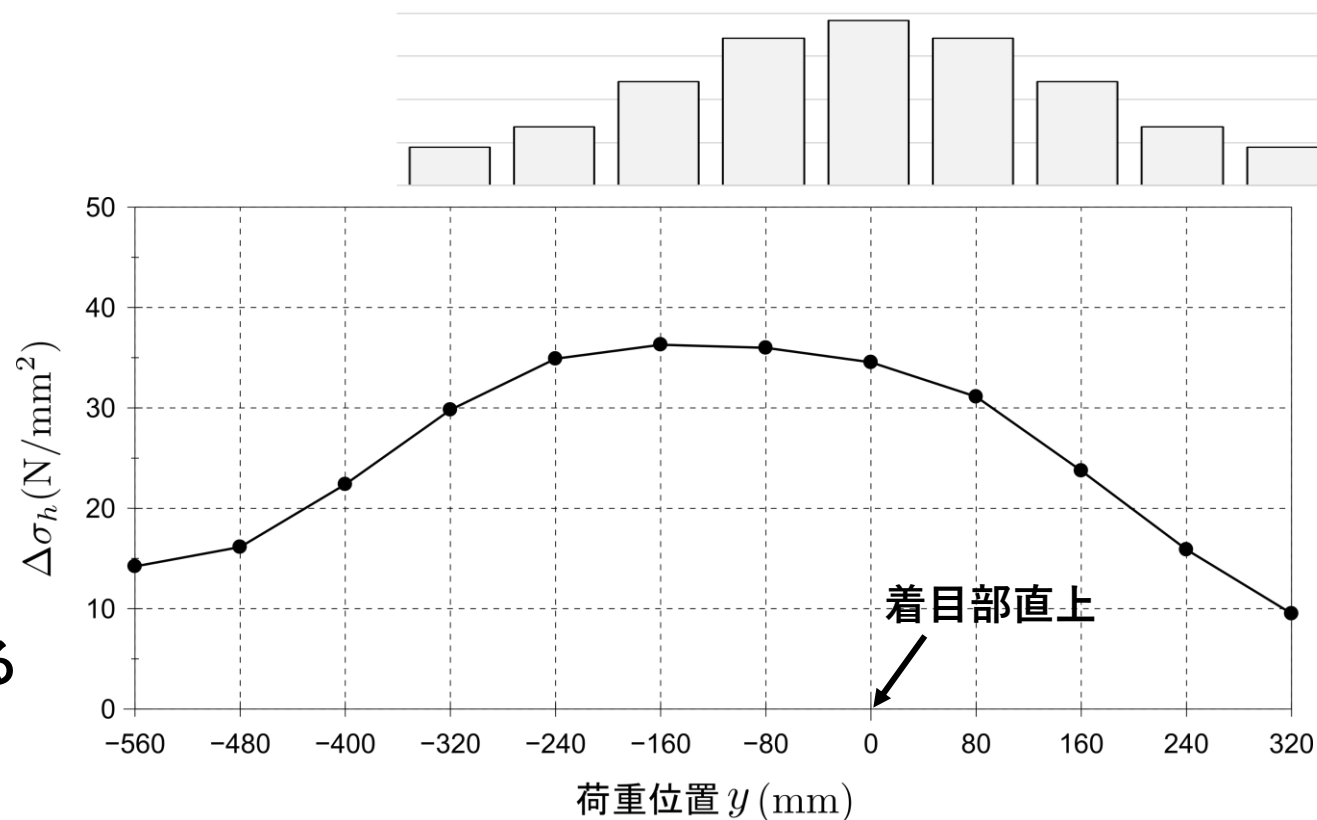


橋軸直角方向に同様の計算を行う！





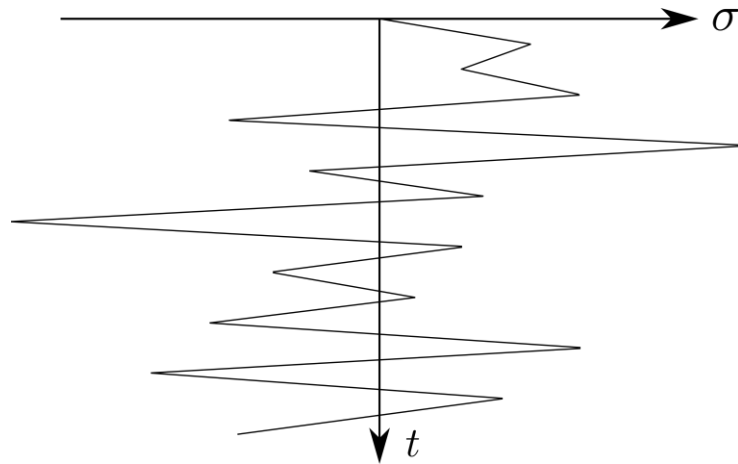
本手法では構造系全体の影響線が得られる
荷重や走行位置の変更に対しても
容易に対応することができる！



マイナー則に従い、設計寿命100年の累積疲労損傷比を算出

走行位置の期待値(mm)	-240	-160	-80	0
累積疲労損傷比	0.194	0.222	0.223	0.197

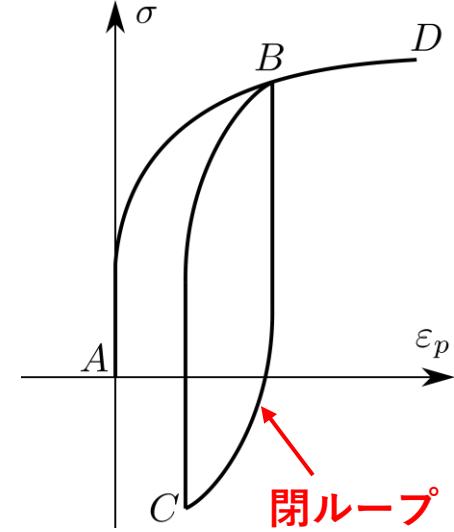
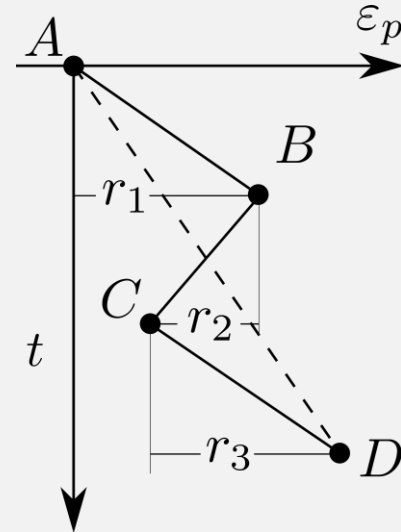
荷重量と走行位置を確率変数とした
モンテカルロシミュレーションにより
作成した応力時系列データ



疲労被害（累積疲労損傷比）

レインフロー法²⁾

金属の応力-塑性ひずみ曲線の性質から
考え出されたアルゴリズム



$B \sim C(r_2)$: 1サイクル
 $A \sim D(r_1 - r_2 + r_3)$: 1/2サイクル

²⁾ 遠藤達雄, 安在弘之: 簡明にされたレインフローアルゴリズム「P/V 差法」について, 材料, 日本材料学会, 30 卷328 号, pp.89-93, 1981.

累積疲労損傷比を算出し、疲労寿命評価に与える影響を評価する

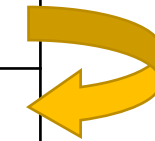
簡易手法

ランダム性を考慮しない手法

MC法

試行台数10万台のモンテカルロシミュレーション100回の平均値

走行位置の期待値(mm)	-240	-160	-80	0
簡易手法	0.194	0.222	0.223	0.197
MC法	0.198	0.226	0.227	0.199
相対差%	2.1	1.8	1.8	1.0



必ず大きくなる

相対差は2%程度 ⇒ 荷重のランダム性の影響は小さいことが確認できた

➤ MC法のばらつき

走行位置の期待値(mm)	-240	-160	-80	0
変動係数%	3.84	3.25	3.32	3.22

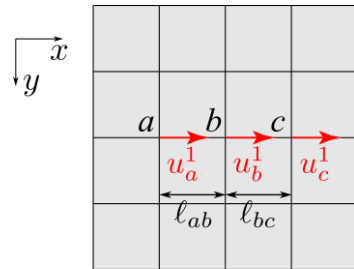
計算負荷が大きいわりにばらつきが大きい ⇒ 部分係数での考慮が合理的

相反定理に基づき，従来手法よりも効率的な影響線の解析手法を提案した。

	計算コスト	影響線の可視化	モデルの修正	汎用FEAコードへ の実装
本提案手法	○ 着目点ごとに1回だけ	○ 作業は不要	○ 不要	○ 荷重を載荷するだけ

- 通常の単位荷重による有限要素解析結果との比較を行った。相対差は0.1%程度であり，本手法の妥当性を確認することができた。
- 提案手法で必要となる作業は要素長と材料定数から設定できる荷重を作用させるだけで，従来手法よりも効率的に影響線を求めることができる。
- 荷重のランダム性が疲労耐久性の評価に与える影響は小さいことがわかった。

➤ 節点におけるひずみの定義



節点 b のひずみ := 節点 a, b, c の変位を2次関数で内挿したときの節点 b における傾き

$$(\epsilon_x)_b = \frac{-l_{bc}u_a}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{(l_{bc} - l_{ab})u_b}{l_{ab}l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})}$$

➤ ひずみの影響線

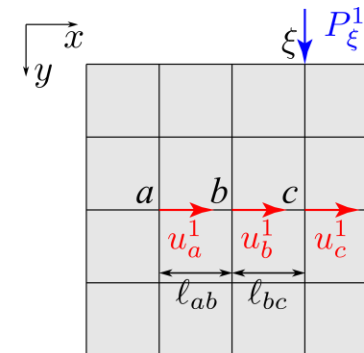
相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$

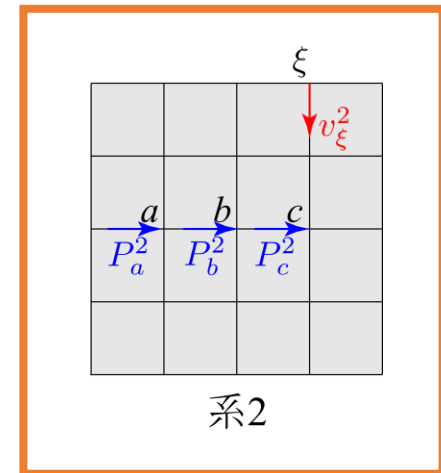


$$P_a^2 = \frac{-l_{bc}}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})}, \quad P_b^2 = \frac{l_{bc} - l_{ab}}{l_{ab}l_{bc}}, \quad P_c^2 = \frac{l_{ab}}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})}$$

$$\frac{-l_{bc}u_a}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{(l_{bc} - l_{ab})u_b}{l_{ab}l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} = (\epsilon_x)_b = v_\xi^2$$



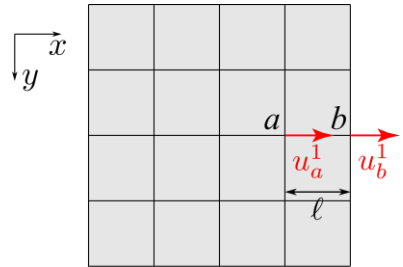
系1



系2

系2の変位 v_ξ が節点 b におけるひずみの影響線となる

➤ 最外縁の節点におけるひずみの定義



節点 b のひずみ := 要素辺 ab のひずみ

$$(\epsilon_x)_b = \frac{-u_a}{l} + \frac{u_b}{l}$$

➤ ひずみの影響線

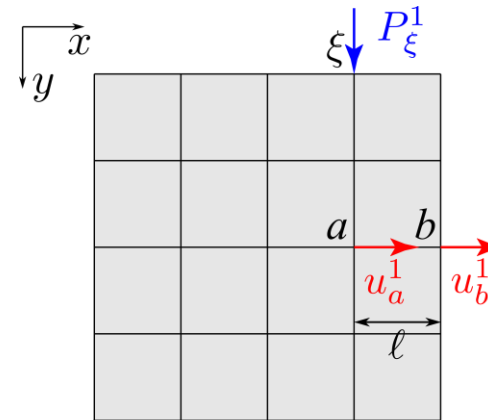
相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$

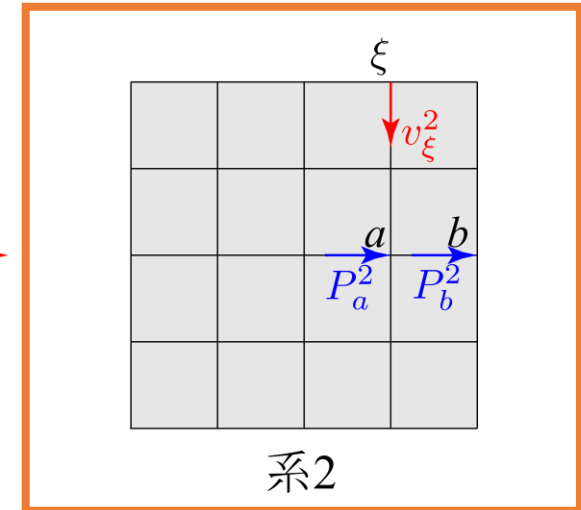
↓

$$P_a^2 = -\frac{1}{l}, \quad P_b^2 = \frac{1}{l}$$

$$\frac{-u_a}{l} + \frac{u_b}{l} = (\epsilon_x)_b = v_\xi^2$$



系1



系2

系2の変位 v_ξ が
節点 b におけるひずみの影響線となる

➤ 要素辺上の点における変位 (双一次四辺形要素)

要素辺上の点 b における変位
$$u_b = \frac{l_{bc}u_a}{l_{ab} + l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c}{l_{ab} + l_{bc}}$$

➤ 板表面の変位の影響線

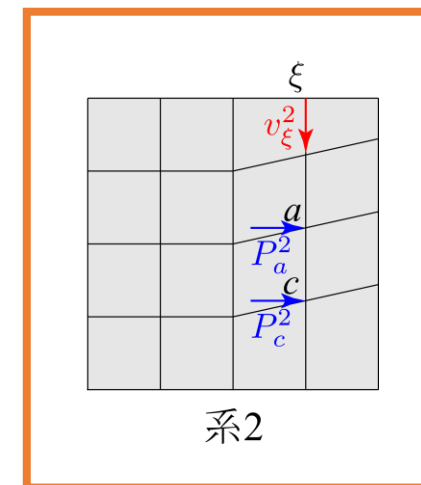
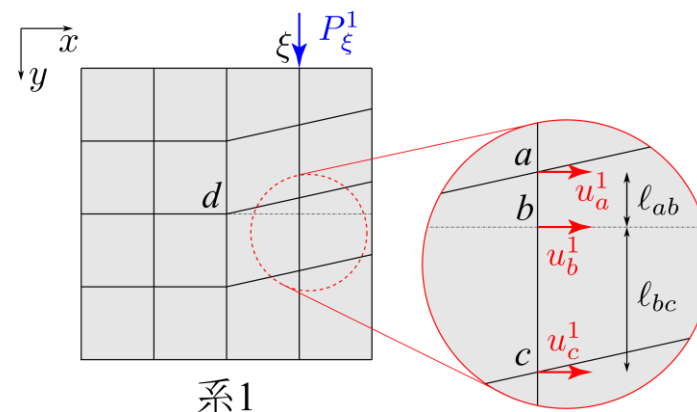
相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$



$$P_a^2 = \frac{l_{bc}}{l_{ab} + l_{bc}}, \quad P_c^2 = \frac{l_{ab}}{l_{ab} + l_{bc}}$$

$$\frac{l_{bc}u_a^1}{l_{ab} + l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c^1}{l_{ab} + l_{bc}} = u_b^1 = v_\xi^2$$



系2の変位 v_ξ が点 b における変位の影響線となる

➤ 板表面における変位

節点 a の板表面における変位

$$u_{a,\text{surface}} = u_a - \frac{t}{2}\theta_a \quad \text{ここに, } t \text{ は板厚}$$

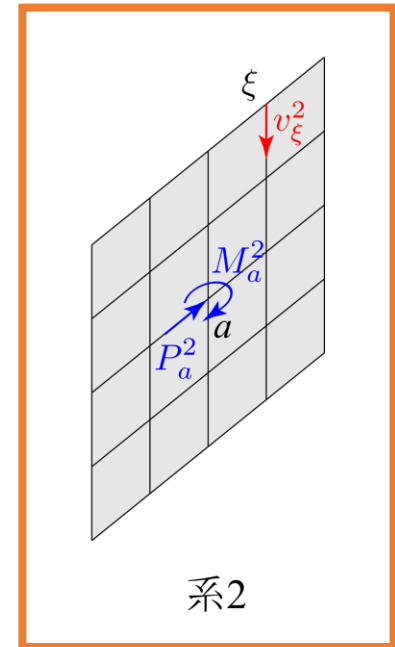
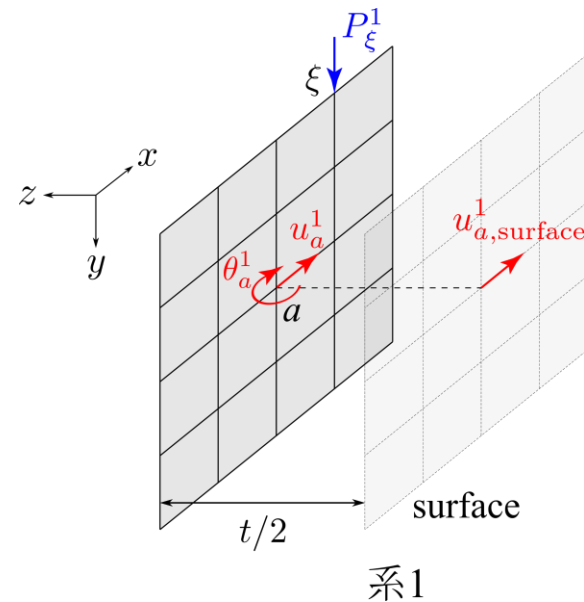
➤ 板表面の変位の影響線

相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + \theta_a^1 M_a^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$$

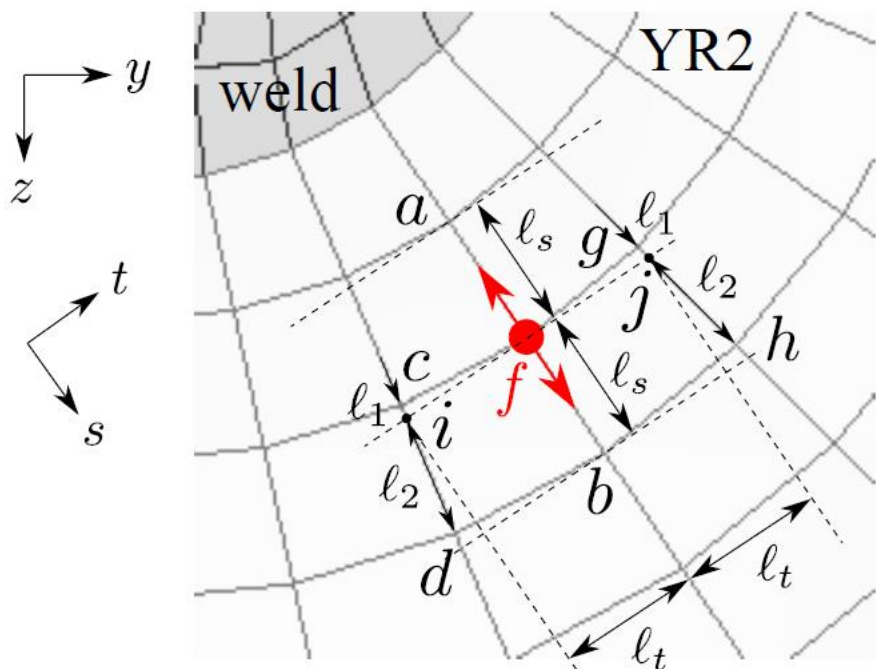
↓ $P_a^2 = 1, \quad M_a^2 = -\frac{t}{2}$

$$u_a - \frac{t}{2}\theta_a = u_{a,\text{surface}} = v_\xi^2$$



ひずみや応力においても同様の考え方で影響線を求めることができる。

着目点



$$l_s = 2.4 \text{ mm}, \quad l_t = 2.54608 \text{ mm},$$

$$l_1 = 0.250767 \text{ mm}, \quad l_2 = 2.14923 \text{ mm}$$

➤ 応力影響線を得るための荷重

$$-\frac{2}{t}(M_t)_a = \frac{2}{t}(M_t)_b = -(P_s)_a = (P_s)_b$$

$$= \frac{E}{2l_s(1-\nu^2)} = 4.57876 \times 10^4 \text{ N/mm}^3$$

$$\frac{2}{t}(M_s)_c = -\frac{2}{t}(M_s)_g = -(P_t)_c = (P_t)_g$$

$$= \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{\nu E}{2l_t(1-\nu^2)} = 1.15953 \times 10^4 \text{ N/mm}^3$$

$$\frac{2}{t}(M_s)_d = -\frac{2}{t}(M_s)_h = -(P_t)_d = (P_t)_h$$

$$= \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{\nu E}{2l_t(1-\nu^2)} = 1.35290 \times 10^3 \text{ N/mm}^3$$

試行台数を $10^3 \sim 10^7$ 台と変化させてモンテカルロシミュレーションを100回行い、累積疲労損傷比を算出

試行台数	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
平均値	0.248	0.226	0.227	0.226	0.226
最大値	0.532	0.306	0.245	0.232	0.229
最小値	0.076	0.167	0.210	0.220	0.224
標準偏差	9.59×10^{-2}	2.49×10^{-2}	7.53×10^{-3}	2.44×10^{-3}	8.38×10^{-4}
変動係数%	38.8	11.0	3.32	1.08	0.371

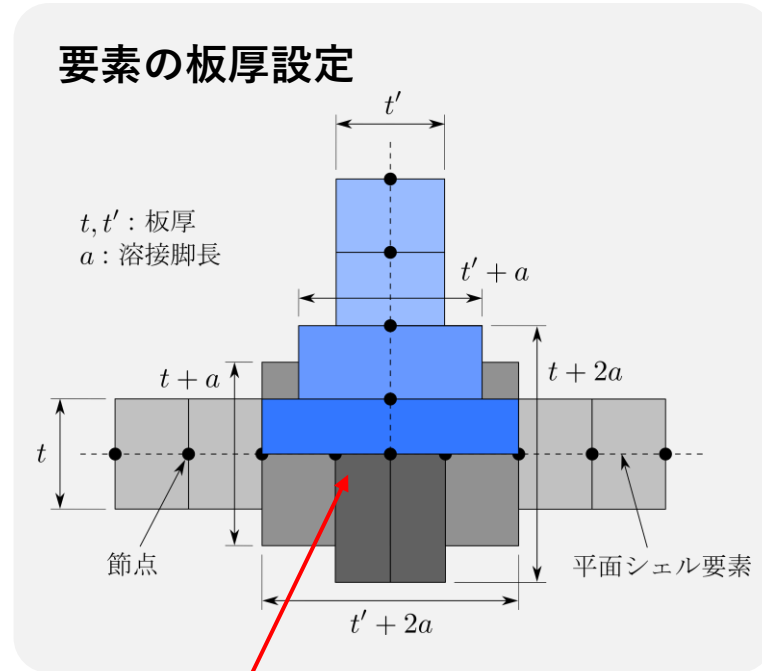
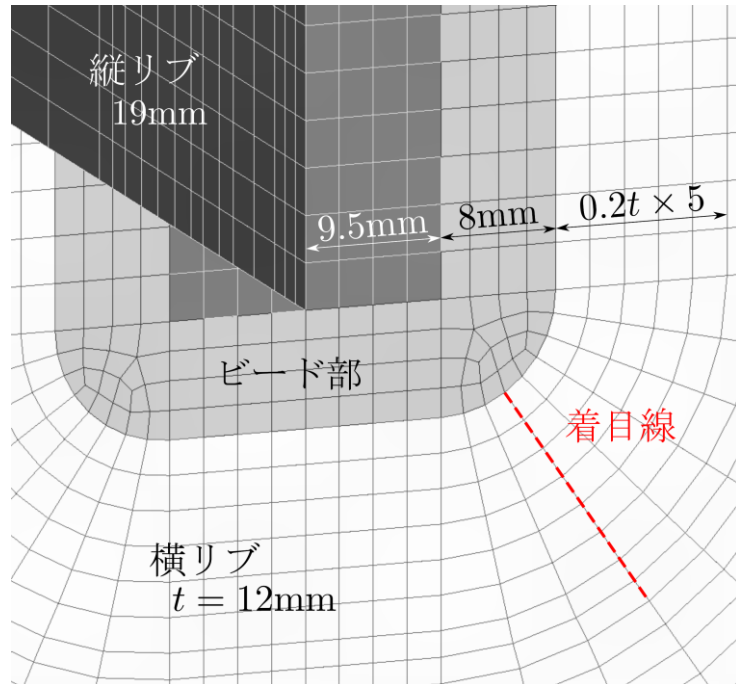
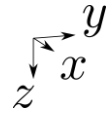
→
変動係数は試行台数を N 倍すると $1/\sqrt{N}$ 倍に

⇒ 変動係数が5%未満となった試行台数 10^5 台を採用

「鋼構造物の疲労設計指針」では連続体ソリッド要素で溶接ビード部をモデル化することを原則としている

横山らのシェルモデル

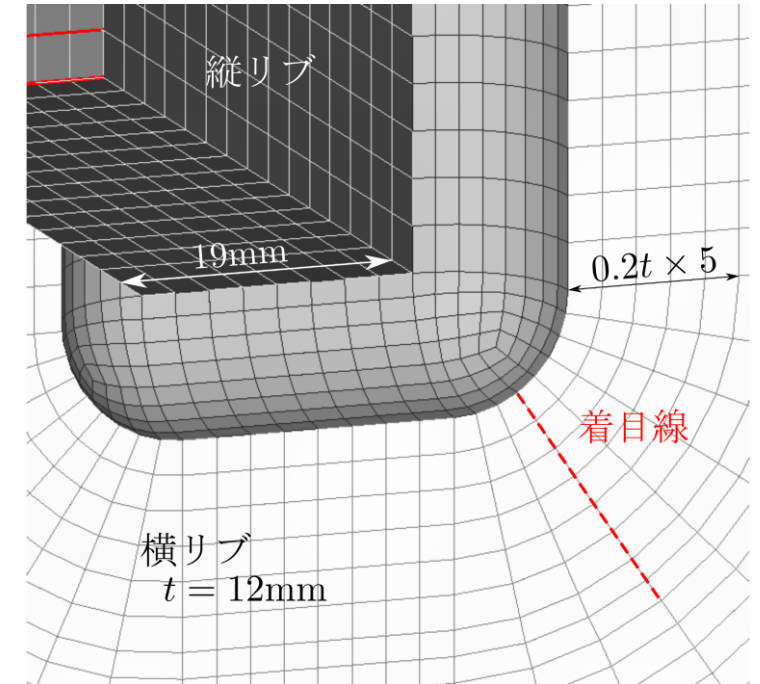
要素の板厚を局所的に増加させる



重複している

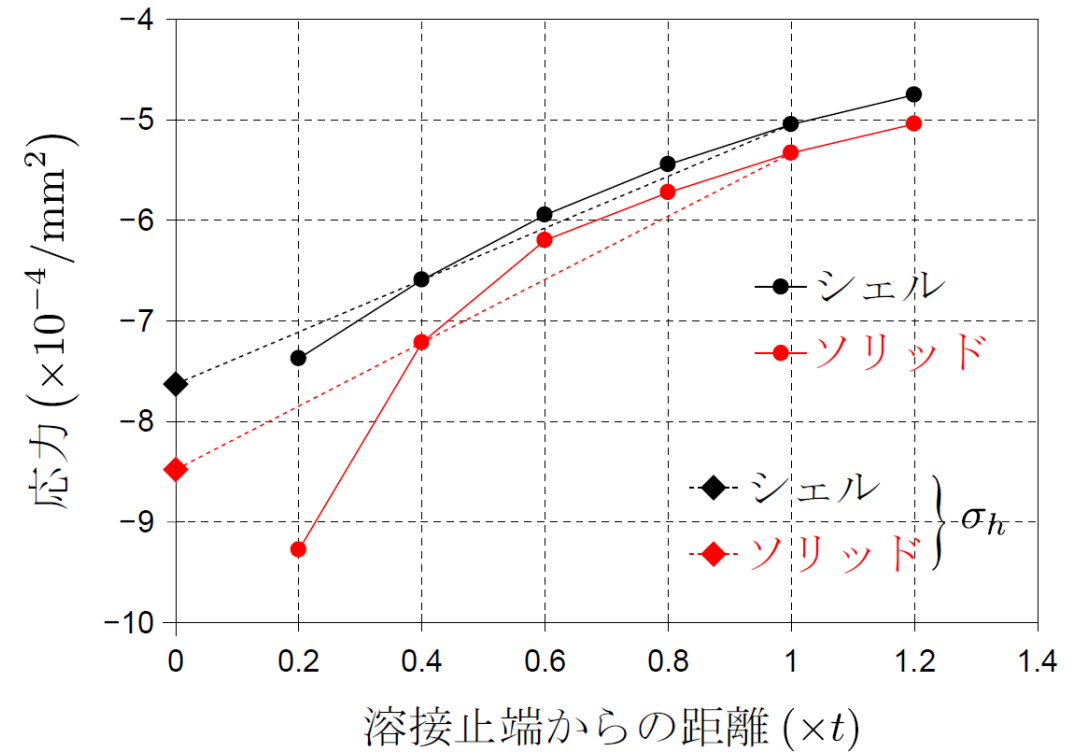
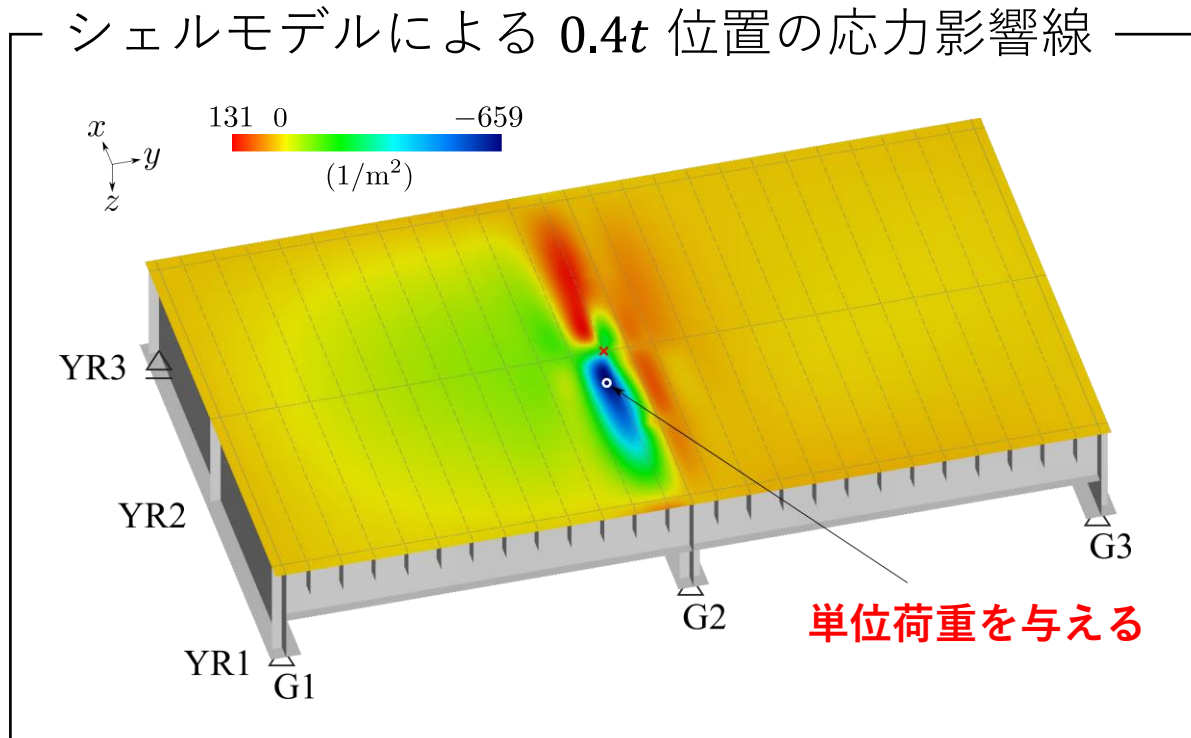
ソリッドモデル

着目部を連続体要素でモデル化



⇒ 着目線上の応力を比較!

シェルモデルとソリッドモデルの比較



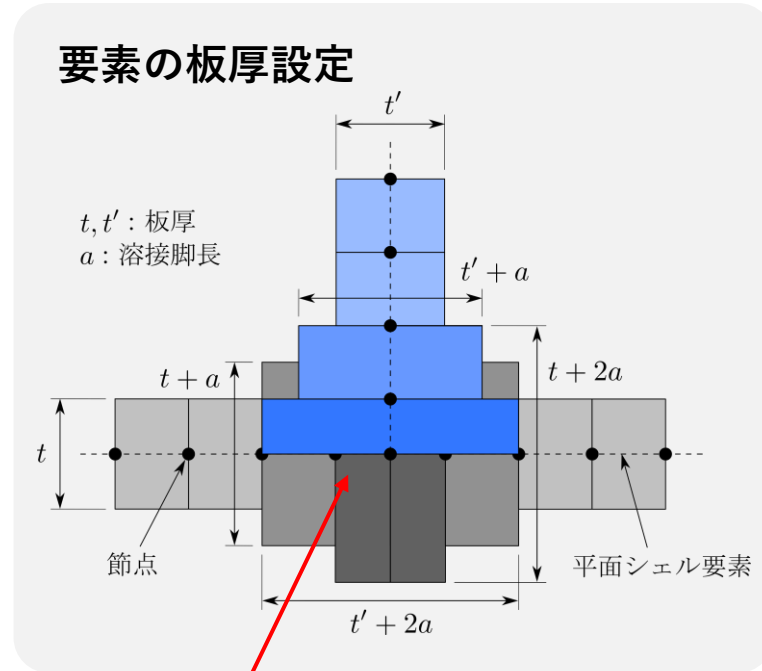
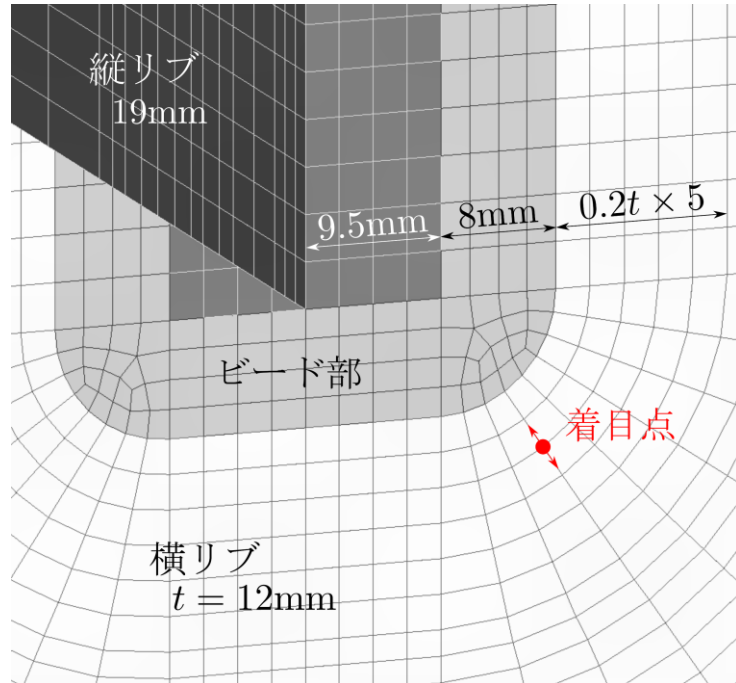
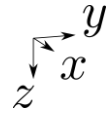
溶接止端からの距離 ($\times t$)	σ_h	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
シェルモデル ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	-7.62768	-7.37390	-6.59228	-5.94645	-5.44525	-5.04691	-4.75315
ソリッドモデル ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	-8.47791	-9.27634	-7.21536	-6.19871	-5.72306	-5.33096	-5.04155
相対差%	-1.0×10	-2.1×10	-8.6	-4.1	-4.9	-5.3	-5.7

⇒ シェルモデルによる評価は危険側！

「鋼構造物の疲労設計指針」では**連続体ソリッド要素で溶接ビード部をモデル化することを原則としている**

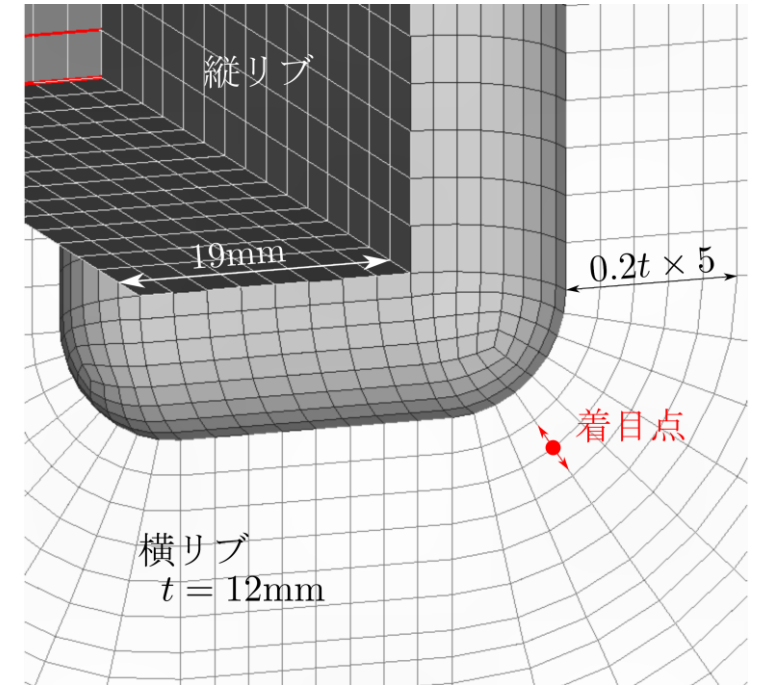
横山らのシェルモデル

要素の**板厚を局所的に増加**させる



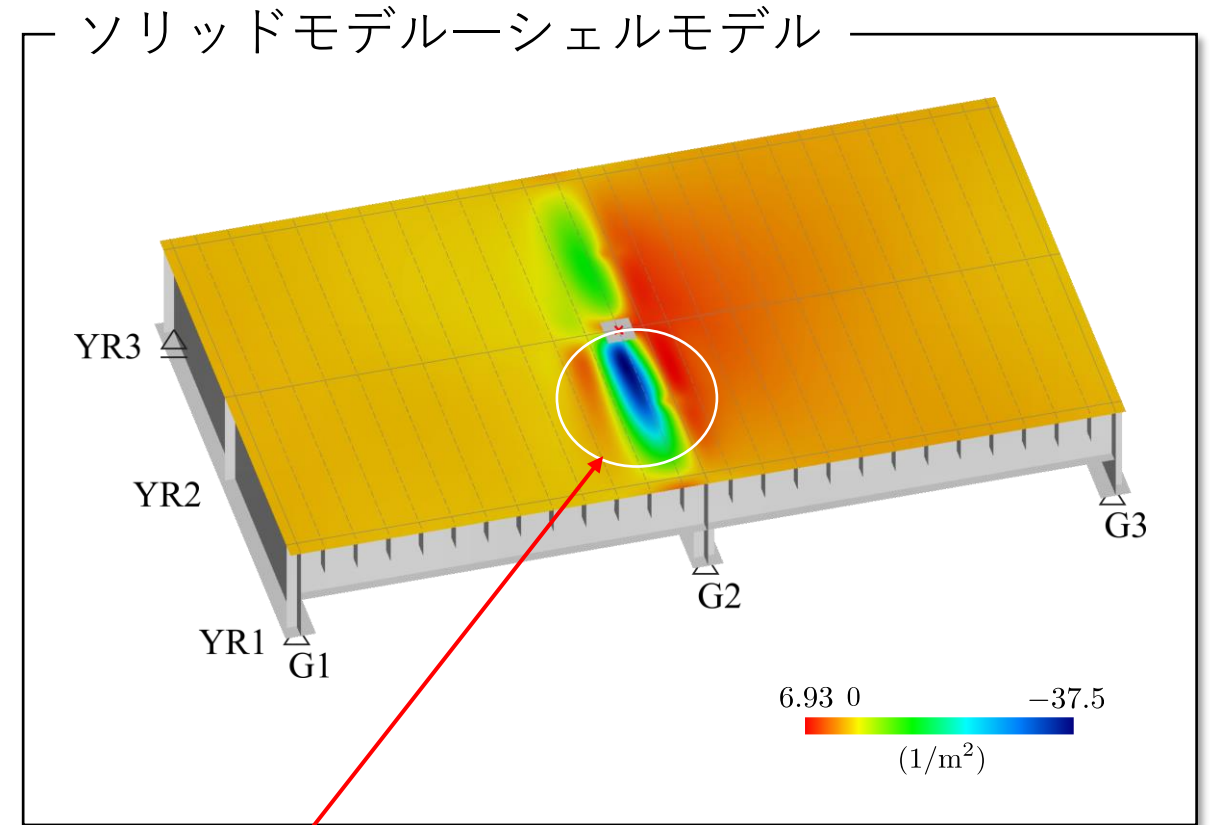
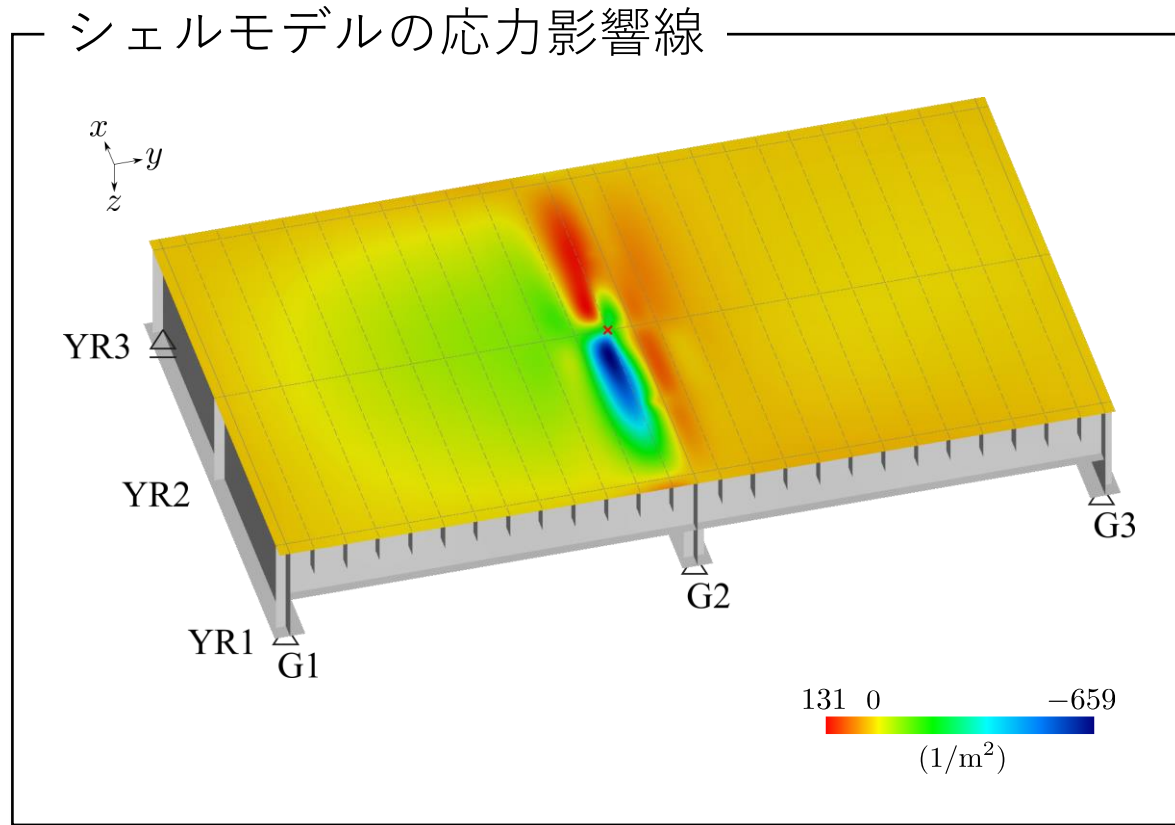
ソリッドモデル

着目部を連続体要素でモデル化



重複している

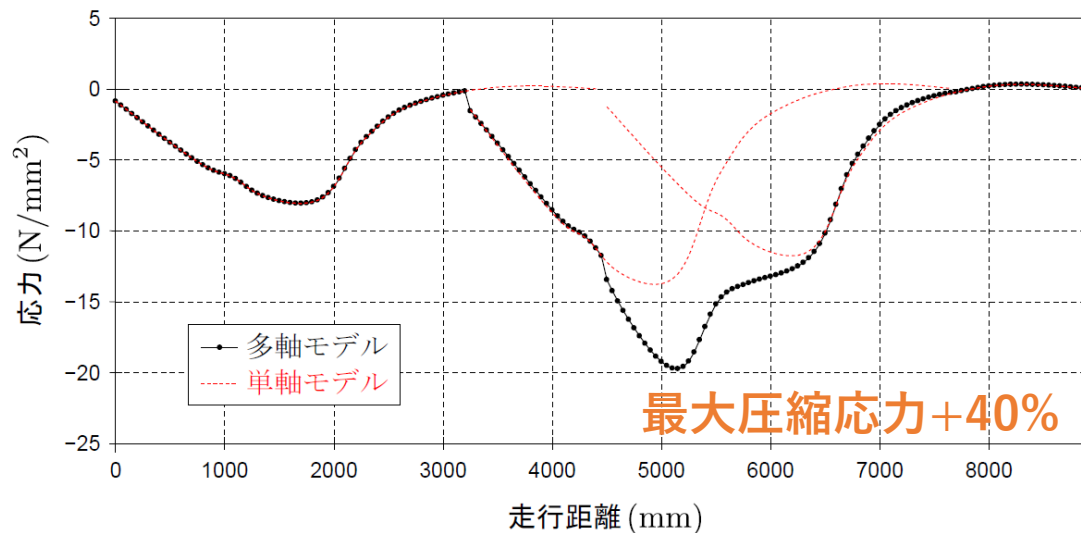
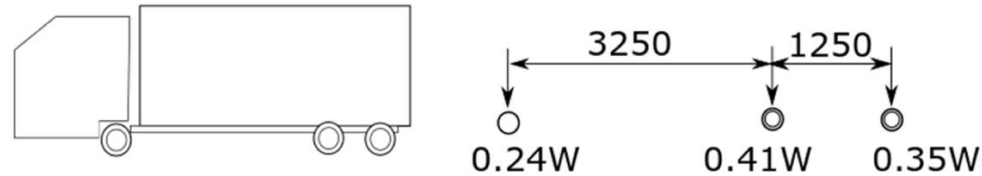
⇒ 着目点における応力の影響線を比較!



ソリッドモデルの方が最大圧縮応力が大きくなっている

⇒ シェルモデルによる評価は危険側！

➤ 車軸の干渉が疲労寿命評価に与える影響を評価する



走行位置の期待値 y (mm)	-240	-160	-80	0
換算単軸モデル	0.124	0.143	0.144	0.125
平均値	0.286	0.322	0.315	0.271
最大値	0.300	0.338	0.330	0.286
最小値	0.272	0.307	0.298	0.257
標準偏差 ($\times 10^{-3}$)	6.08	5.94	5.73	4.84
変動係数%	2.12	1.85	1.82	1.78
相対差%	131	125	118	117

試行台数 10^5 台のモンテカルロシミュレーションは計算負荷が非常に高いため、荷重のランダム性は考慮しない方が実用的であると考え