

---

令和2年 修士論文発表会

# Poisson効果を考慮した 一般化梁の定式化とその有限要素の開発

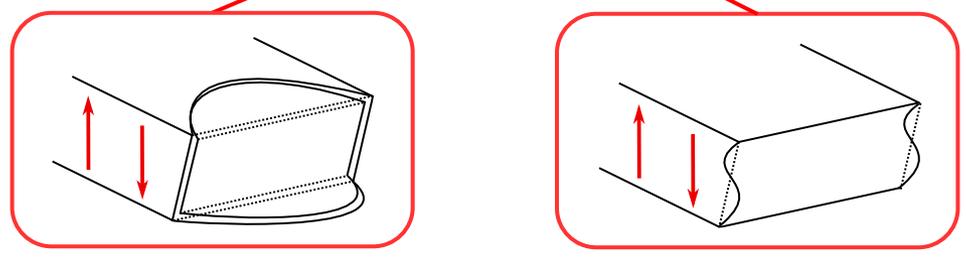
構造強度学研究室  
田淵航

2021年2月9日

---

梁理論：梁の変位場を仮定. 連続体のつり合い式を軸線の運動だけで表す  
橋梁の設計現場では連続体ではなく梁理論を用いた設計が行われることが多い

2021 齊木・鄭 → せん断遅れと横せん断変形を統一的に考慮した梁理論



代表体積要素を用いた半解析的手法により, **任意断面**に適用可能

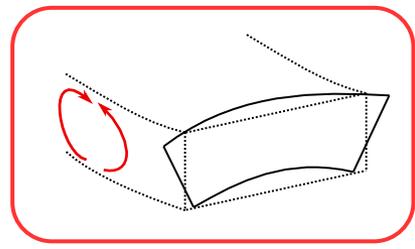
齊木・鄭の梁理論はPoisson効果の影響を考慮していない！

## Poisson効果

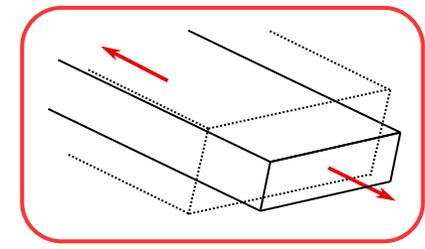
$\nu > 0$

圧縮 → 面内方向に膨らむ

引張 → 面内方向に縮む

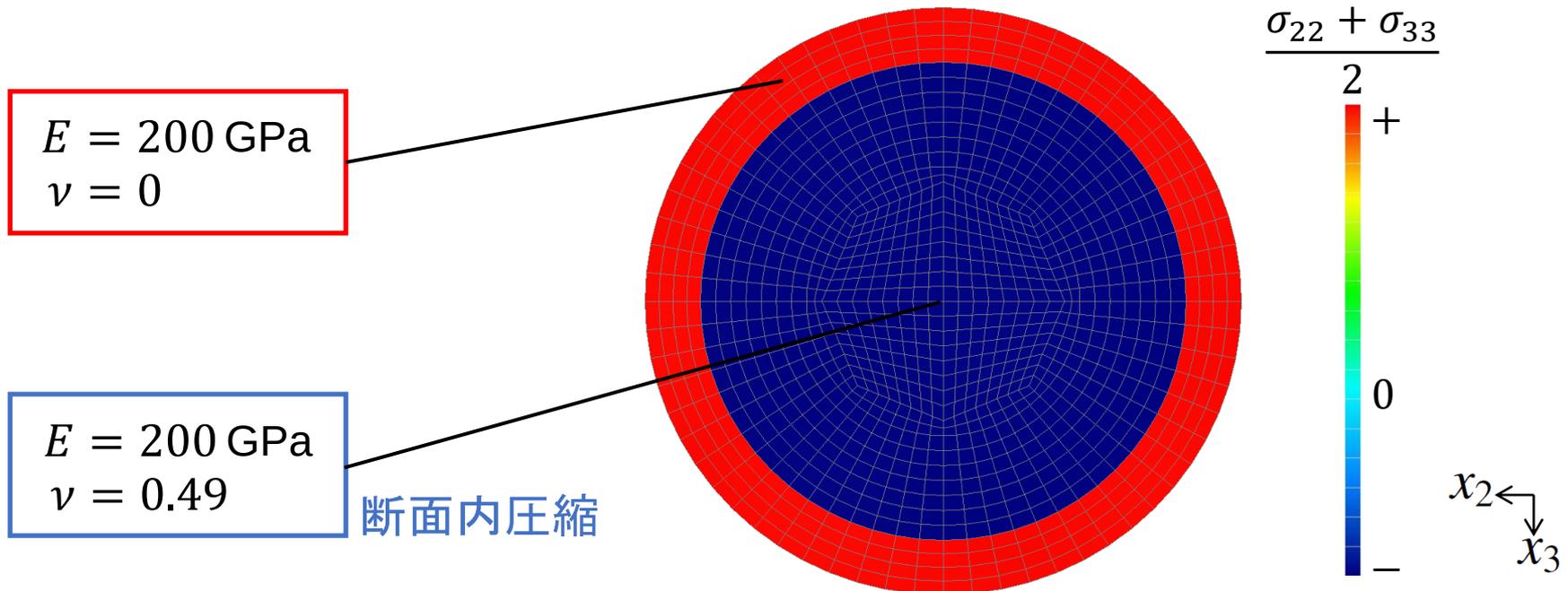


曲げに伴う断面変形



軸変形に伴う断面変形

Poisson比の異なる材料からなる複合断面に $x_1$ 軸方向の圧縮を与える



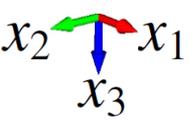
軸圧縮を受けると、Poisson比の大きい充填材の変形がPoisson比の小さい外側の材料によって拘束され、断面内圧縮が生じる → **拘束効果**

複合断面ではPoisson効果の影響を無視できない

→ 積層梁やCFT (Concrete Filled Steel Tube) 等々

これまであまり注目されてこなかったPoisson効果の影響を考慮した梁理論

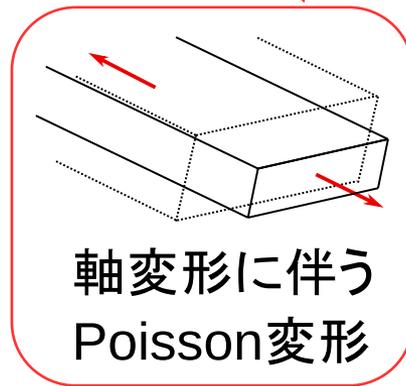
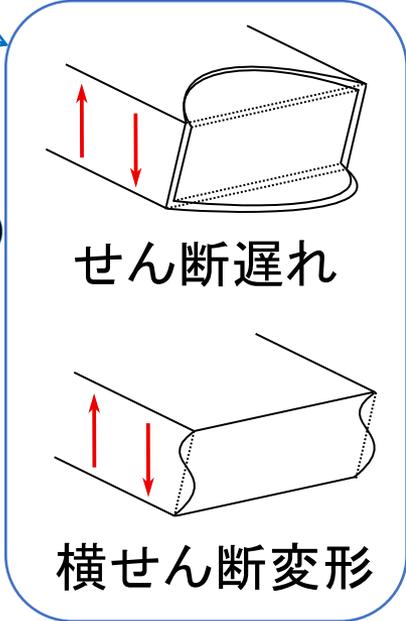
Timoshenko梁の自由度  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_3, \tilde{\gamma}$  に加えて  $g_s, g_b, g_a$  を追加



**軸**  $u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \left( \tilde{\gamma}(x_1) - \frac{d\tilde{u}_3(x_1)}{dx_1} \right) + f_s(x_2, x_3)g_s(x_1) + \tilde{u}_1(x_1)$

**水平**  $u_2(x_1, x_2, x_3) = f_{b2}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a2}(x_2, x_3)g_a(x_1)$

**鉛直**  $u_3(x_1, x_2, x_3) = f_{b3}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a3}(x_2, x_3)g_a(x_1) + \tilde{u}_3(x_1)$

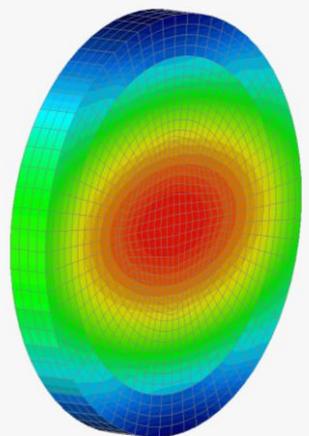


全ポテンシャルエネルギー  
停留原理

支配方程式の導出

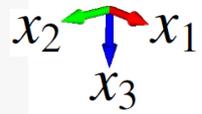
有限要素離散化

斉木・鄭の手法  
でも考慮

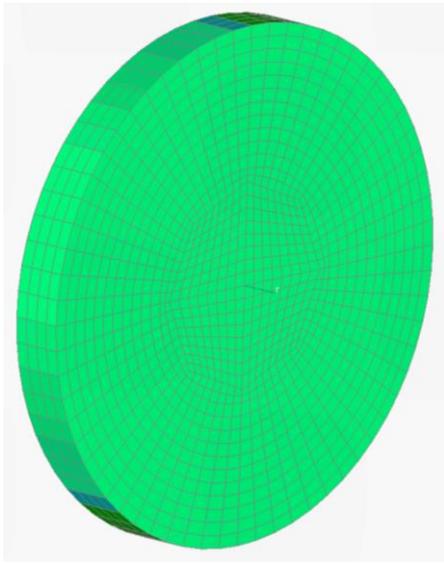


せん断

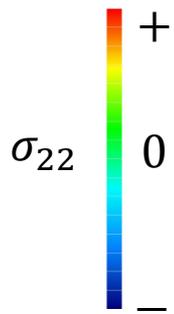
断面の  $x_1$  軸方向変位を  $f_s$  とする



曲げ

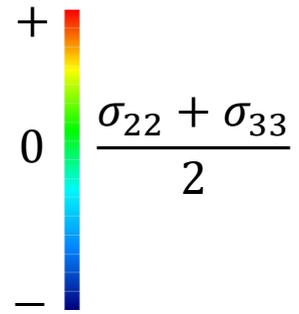


変形モードを含む断面積分を実行することで支配方程式を解くのに必要な断面パラメタを求める

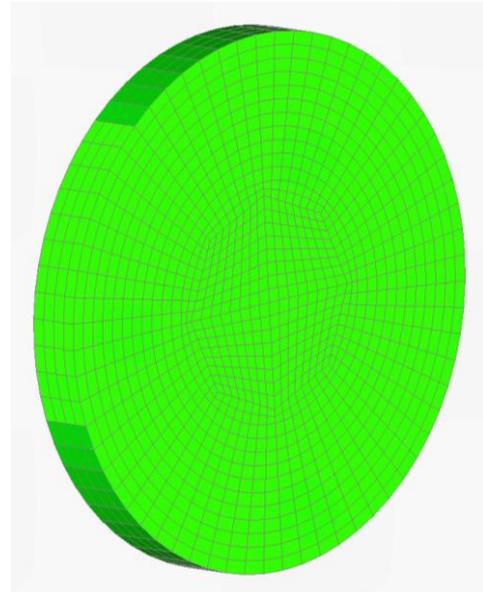


断面の  $x_2$  軸方向変位を  $f_{b2}$  とする  
断面の  $x_3$  軸方向変位を  $f_{b3}$  とする

軸変形



断面の  $x_2$  軸方向変位を  $f_{a2}$  とする  
断面の  $x_3$  軸方向変位を  $f_{a3}$  とする



# 曲げ剛性と軸剛性

## 曲げ剛性

$K_b$  本提案 : Poisson効果を考慮した曲げ剛性

$K_b$  従来 =  $\int_S E x_3^2 dS$  : 従来の手法での曲げ剛性(均質断面ならEI)

$K_b$ 本提案	$K_b$ 従来	$(K_b \text{ 本提案} - K_b \text{ 従来}) / K_b \text{ 従来}$
$6.57 \times 10^8$	$6.12 \times 10^8$	7.40 (%)

$K_b$  従来は  $K_b$  本提案を過小評価

## 軸剛性

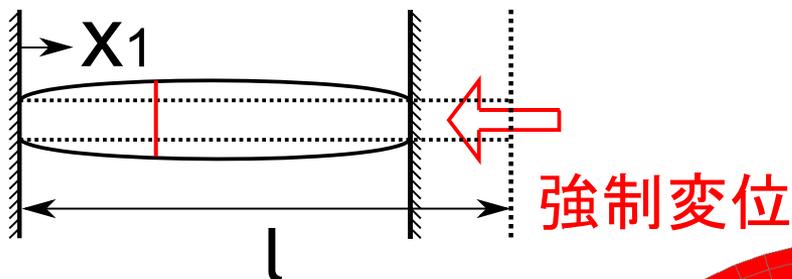
$K_a$  本提案 : Poisson効果を考慮した軸剛性

$K_a$  従来 =  $\int_S E dS$  : 従来の手法での軸剛性(均質断面ならEA)

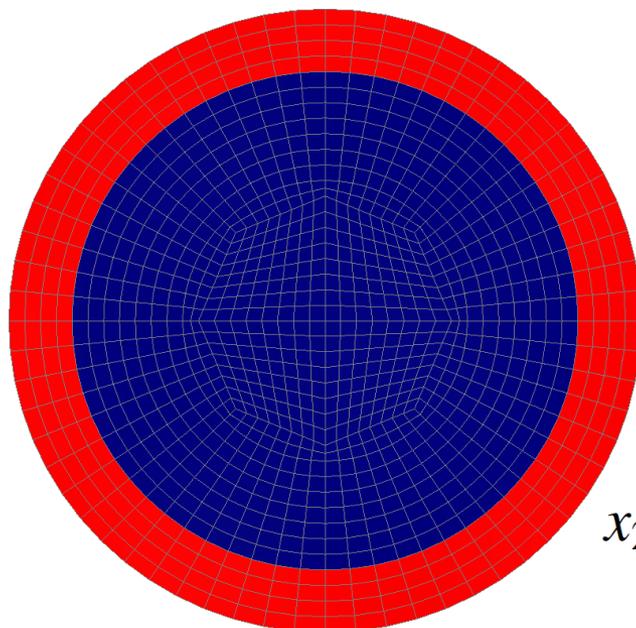
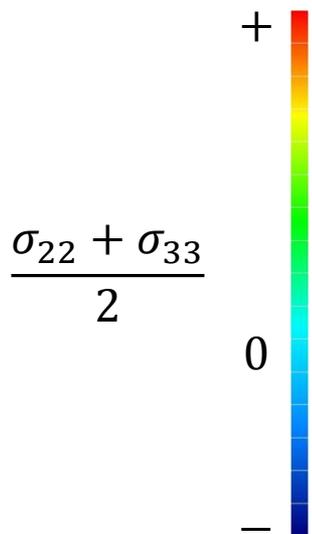
$K_a$ 本提案	$K_a$ 従来	$(K_a \text{ 本提案} - K_a \text{ 従来}) / K_a \text{ 従来}$
$4.18 \times 10^{10}$	$3.92 \times 10^{10}$	6.70 (%)

$K_a$  従来は  $K_a$  本提案を過小評価

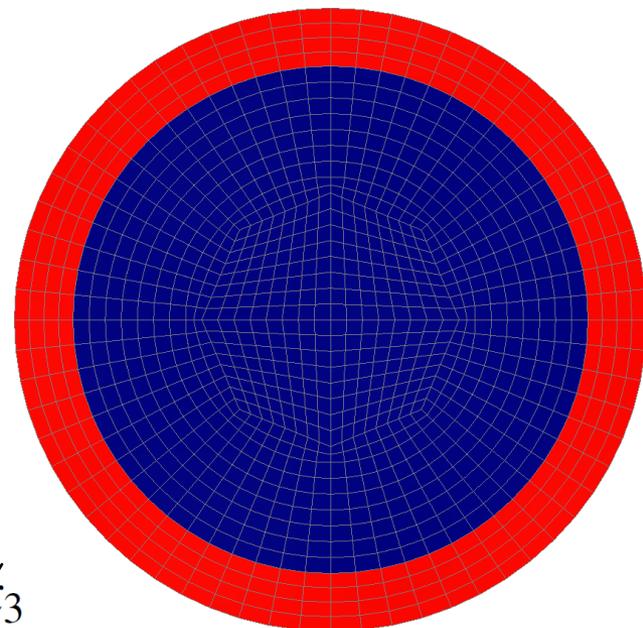
拘束効果の影響



$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の面積ひずみ  $\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2}$  分布



本提案



参照解(連続体)

相対差  $L^2$  ノルム 定義

各手法

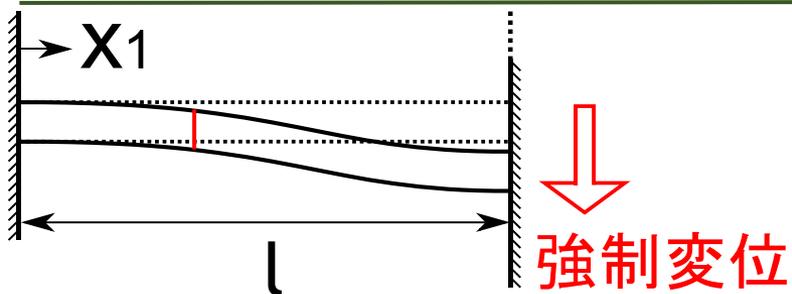
$$\sqrt{\frac{\int_S (\beta_p - \beta_s)^2 dS}{(\sum_{i=1}^n \int_S \beta_s^2 dS) / n}}$$

参照解

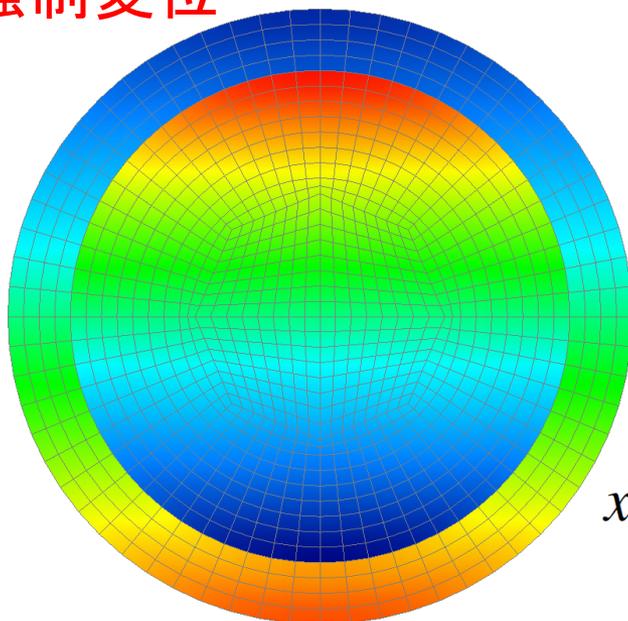
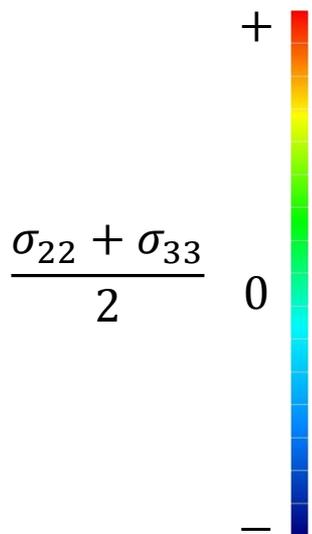
断面数

	本手法	齊木・鄭
$L^2$ ノルム (%)	$6.85 \times 10^{-1}$	$6.64 \times 10^3$

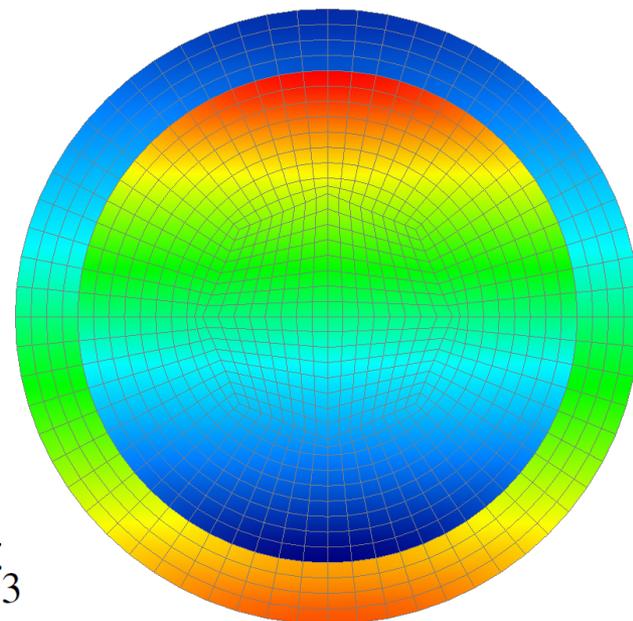
およそ 1/9700



$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の面積ひずみ  $\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2}$  分布



本提案



参照解(連続体)

相対差  $L^2$  ノルム定義

各手法

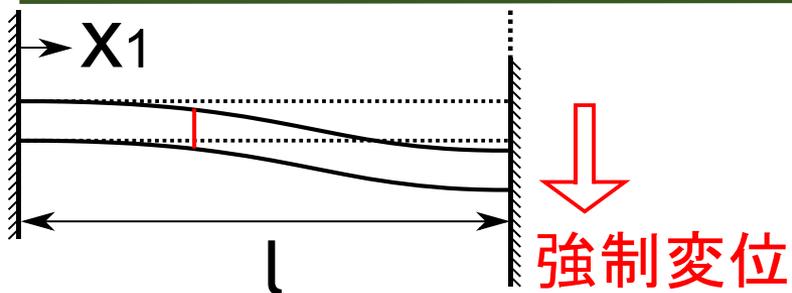
$$\sqrt{\frac{\int_S (\beta_p - \beta_s)^2 dS}{(\sum_{i=1}^n \int_S \beta_s^2 dS) / n}}$$

参照解

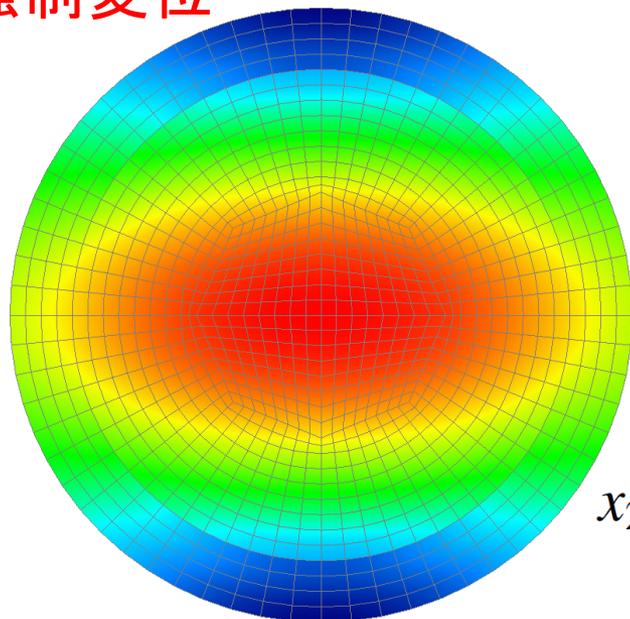
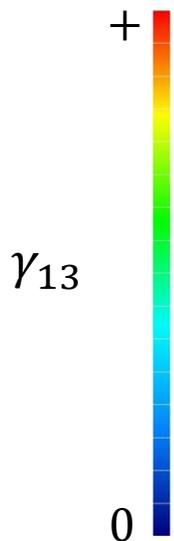
断面数

	本手法	斉木・鄭
$L^2$ ノルム (%)	$5.68 \times 10^{-1}$	$2.19 \times 10^3$

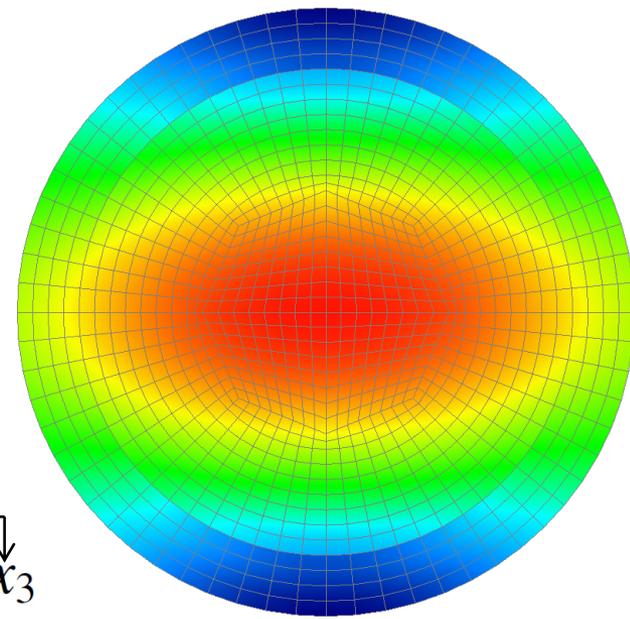
およそ 1/4000



$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の横せん断ひずみ  $\gamma_{13}$  分布



本提案



参照解(連続体)

相対差  $L^2$  ノルム 定義

各手法

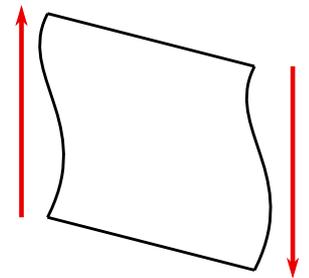
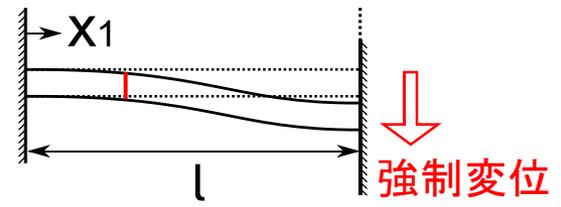
$$\sqrt{\frac{\int_S (\beta_p - \beta_s)^2 dS}{(\sum_{i=1}^n \int_S \beta_s^2 dS) / n}}$$

参照解

断面数

	本手法	斉木・鄭
$L^2$ ノルム (%)	1.36	9.56

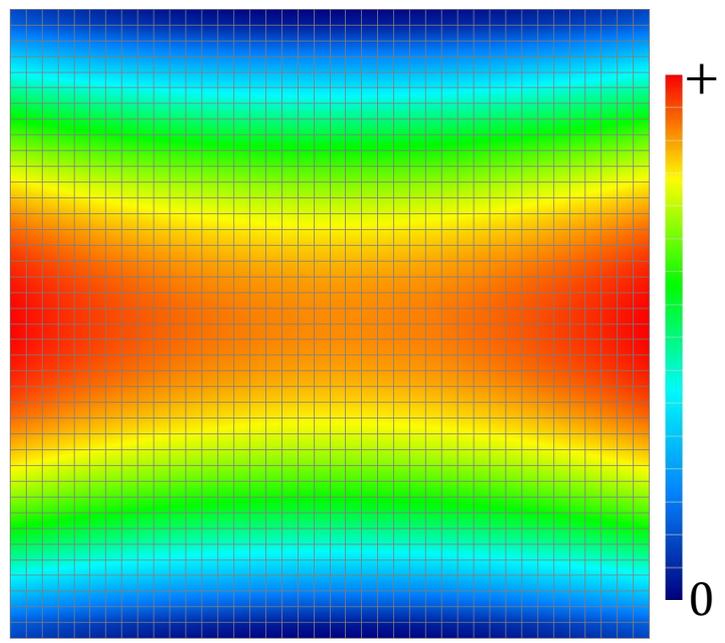
およそ 1/8



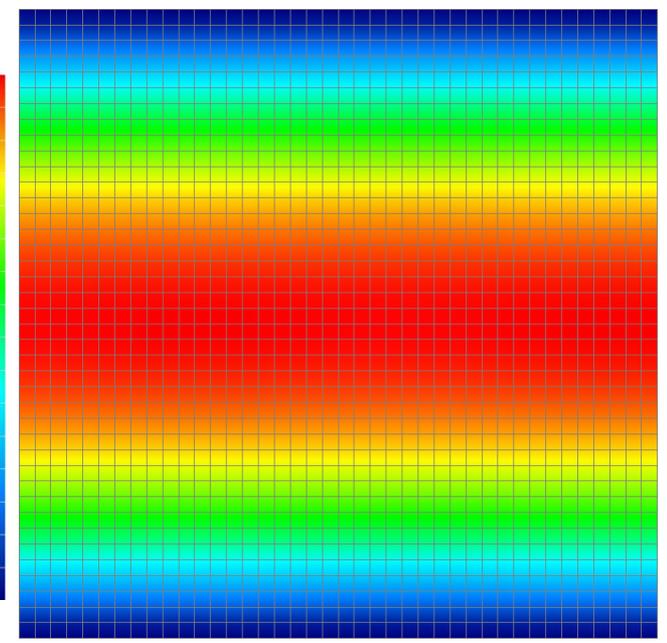
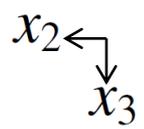
本提案手法による

$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の  $\gamma_{13}$  分布

横せん断変形を与えた  
代表体積要素の  $\gamma_{13}$  分布

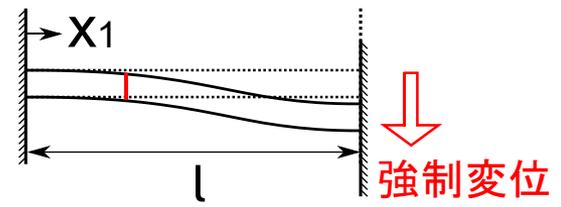
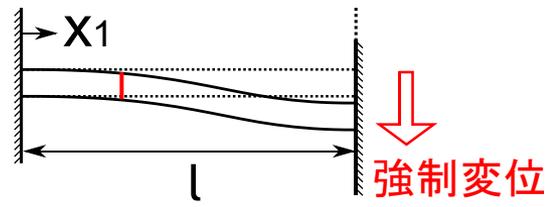


均質矩形断面  
 $E = 200 \text{ GPa}$   
 $\nu = 0.3$



$\gamma_{13}$  分布の  $x_2$  方向の非一様性

代表体積要素 → 現れない  
境界値問題の解 → 現れる

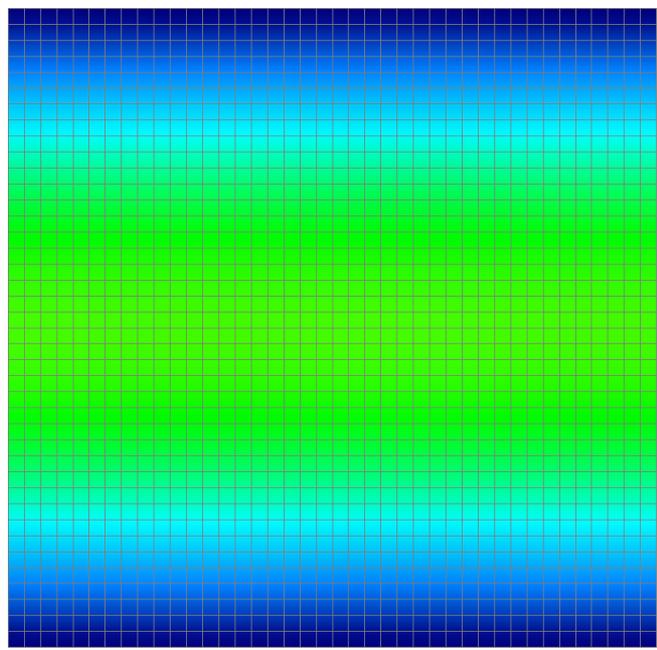


連続体による  $\nu = 0$

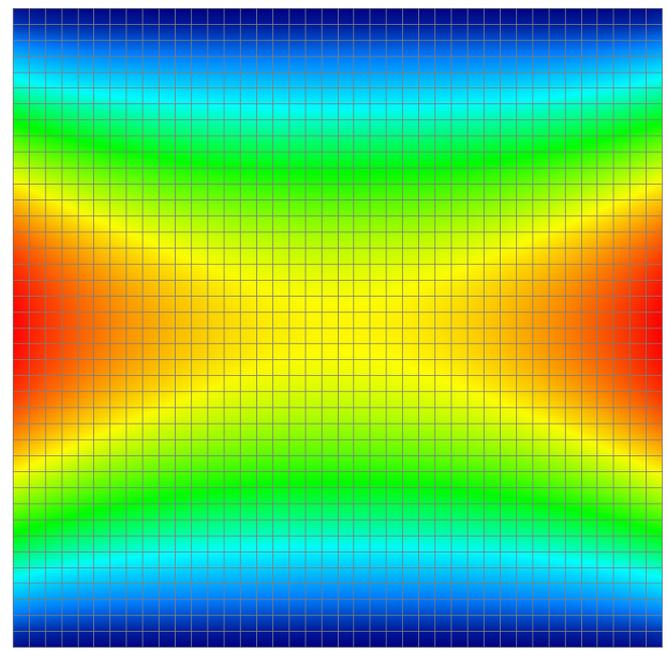
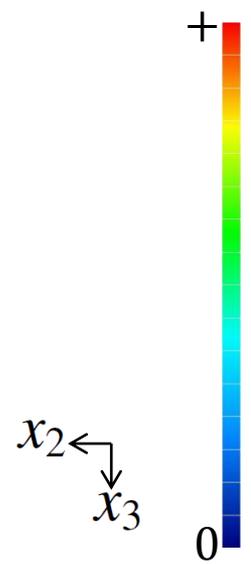
連続体による  $\nu = 0.3$

$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の  $\gamma_{13}$  分布

$\frac{x_1}{l} = \frac{3}{8}$  の断面の  $\gamma_{13}$  分布



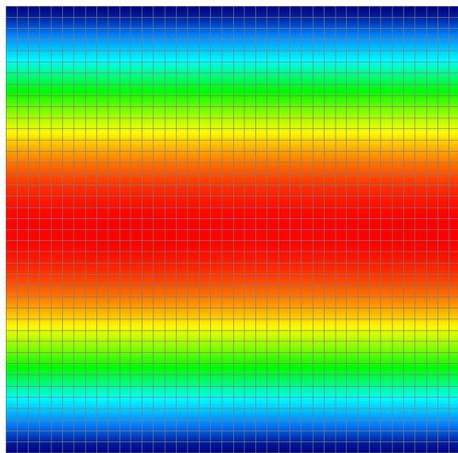
$E = 200 \text{ GPa}$



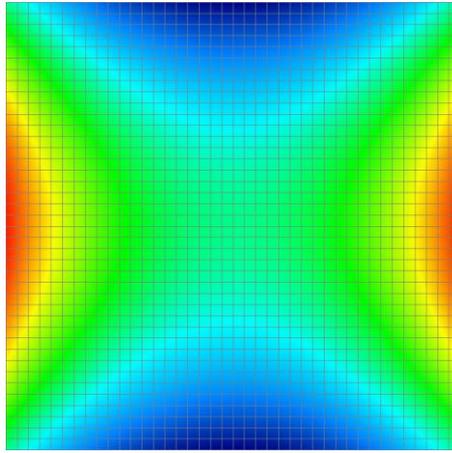
$\gamma_{13}$  分布の  $x_2$  方向の非一様性はPoisson比が0でない梁に特有

$E = 200 \text{ GPa}$      $\nu = 0.3$

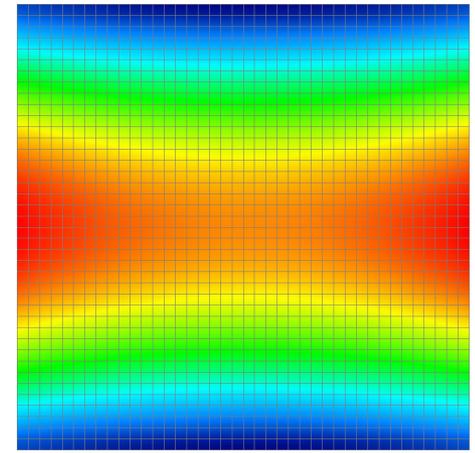
$x_2 \leftarrow$   
 $\downarrow x_3$



+



=



代表体積要素に純せん断を与えたときの $\gamma_{13}$ 分布

代表体積要素に純曲げを与えたときの $u_3$ 分布

境界値問題の解

$$\gamma_{13} = \tilde{\gamma} + f_{s,3} g_s + f_{b3} g'_b + f_{a3} g'_a$$

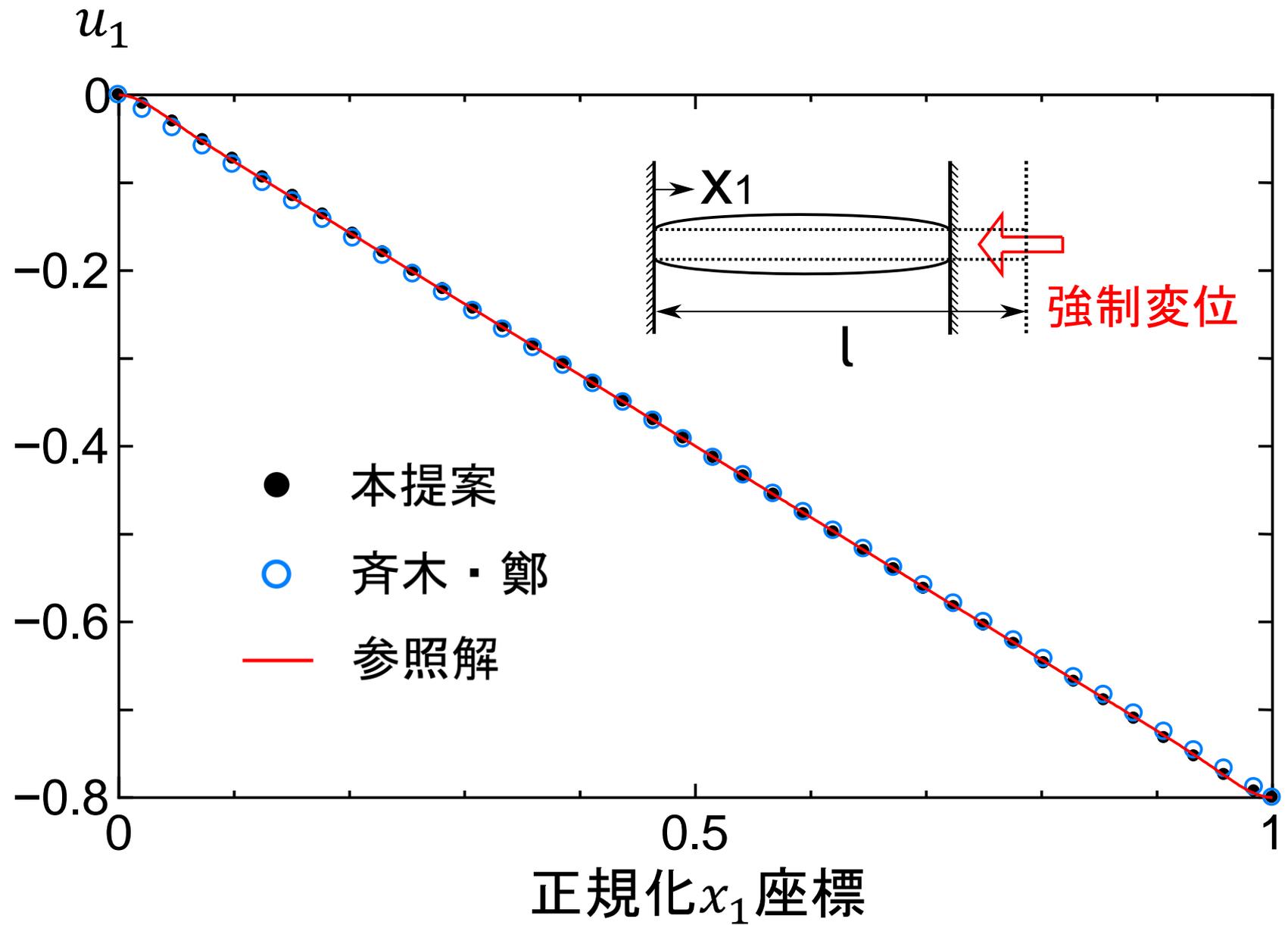
せん断に伴う断面変形の大きさを表す一般化変位

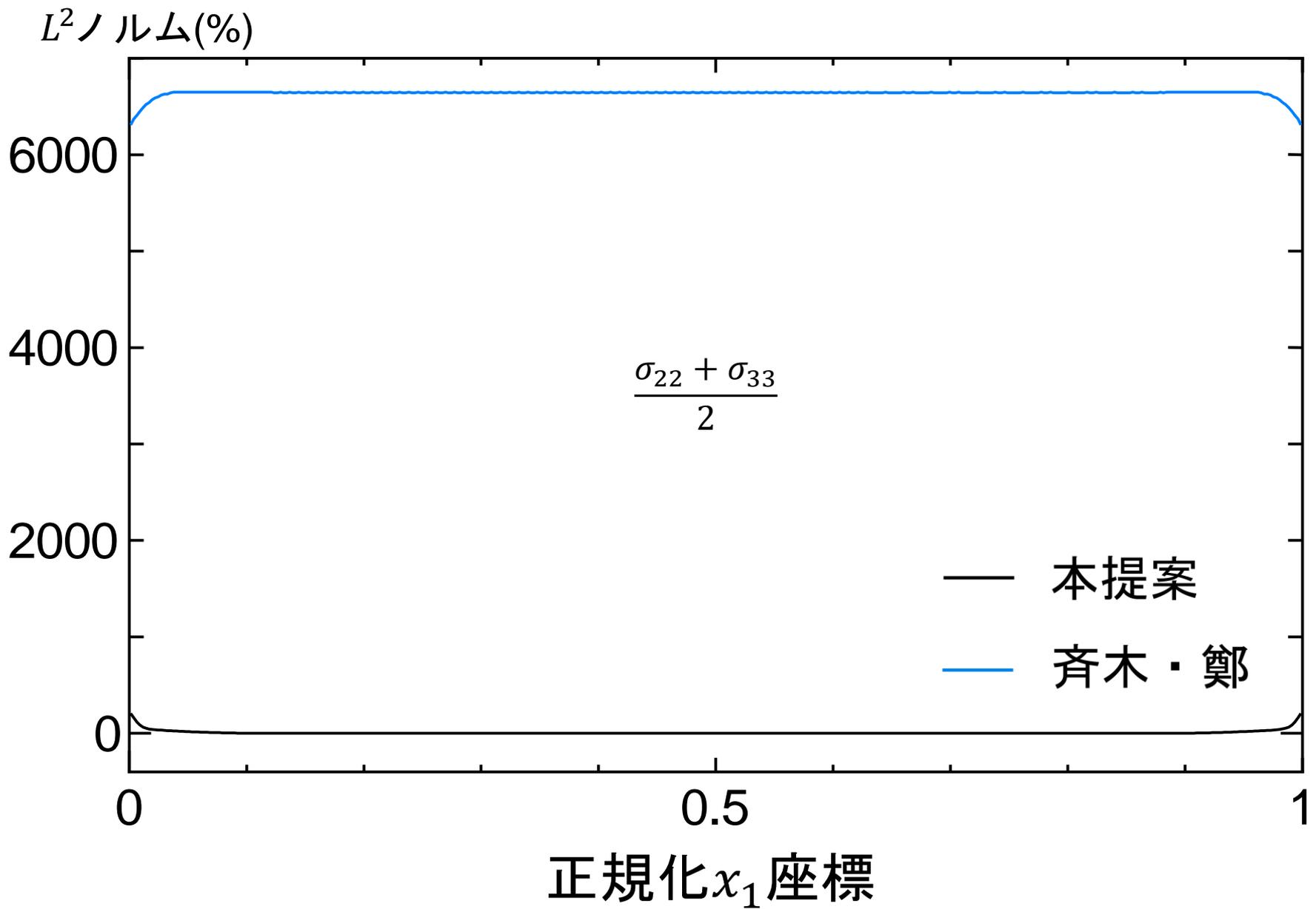
曲げに伴うPoisson効果による断面変形の大きさを表す一般化変位の勾配

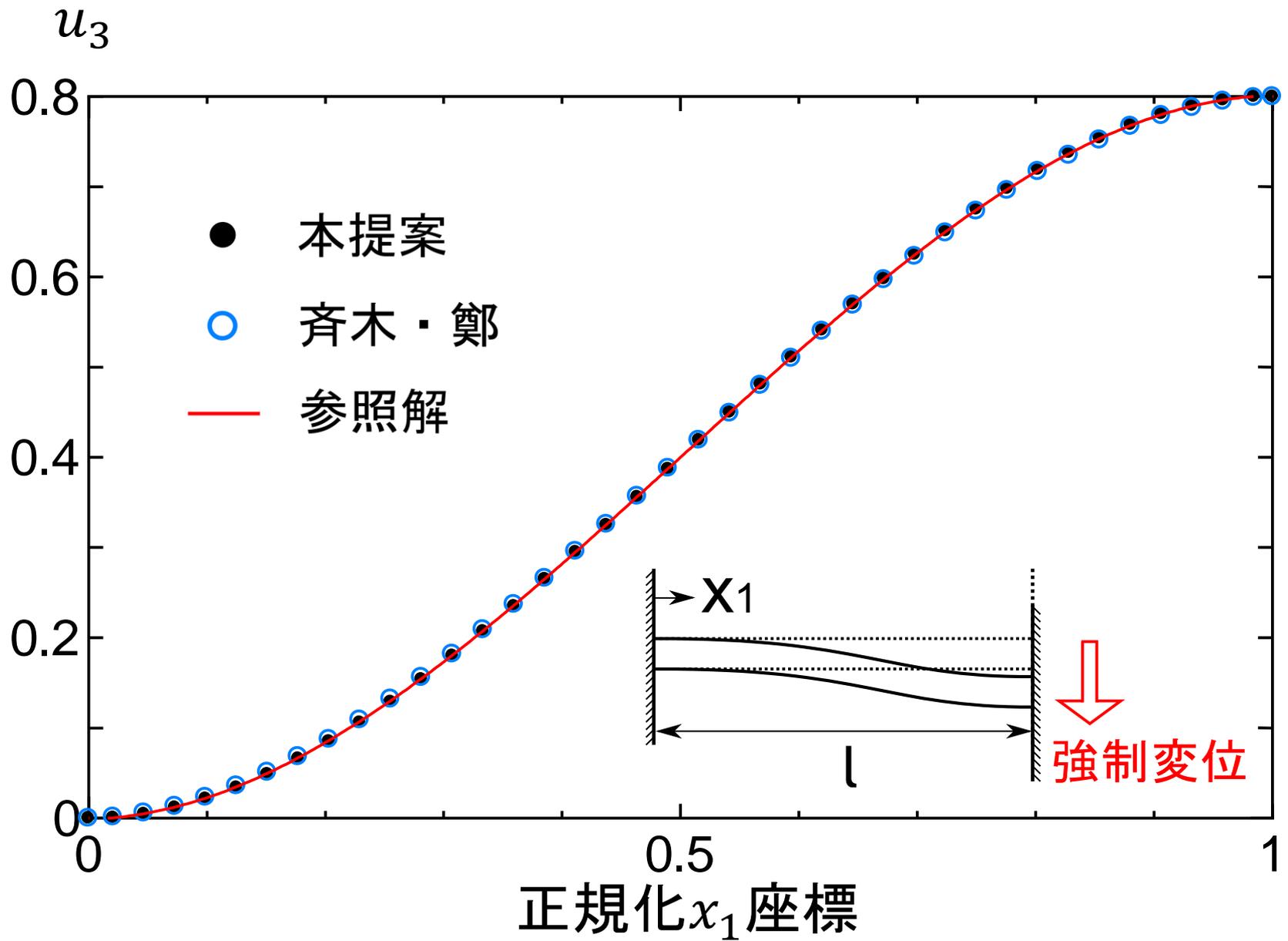
横せん断ひずみ分布において  $x_2$  方向の非一様性が生じる理由を説明できる！

- 曲げや軸変形に伴うPoisson効果による断面変形の大きさを曲げや軸変形とは独立に考慮した梁理論を定式化した。有限要素定式化も行った。
- 軸変形や曲げとせん断を受ける両端固定梁で精度を検証した。
  - Poisson効果を考慮していない梁理論では再現できない断面内のひずみを再現できた。
  - 横せん断ひずみの精度がPoisson効果を考慮していない梁理論よりも向上していることを確認出来た。
- Poisson比が0でない梁では横せん断ひずみに  $x_2$  方向の非一様性が生じる理由を定式化から説明することができた。

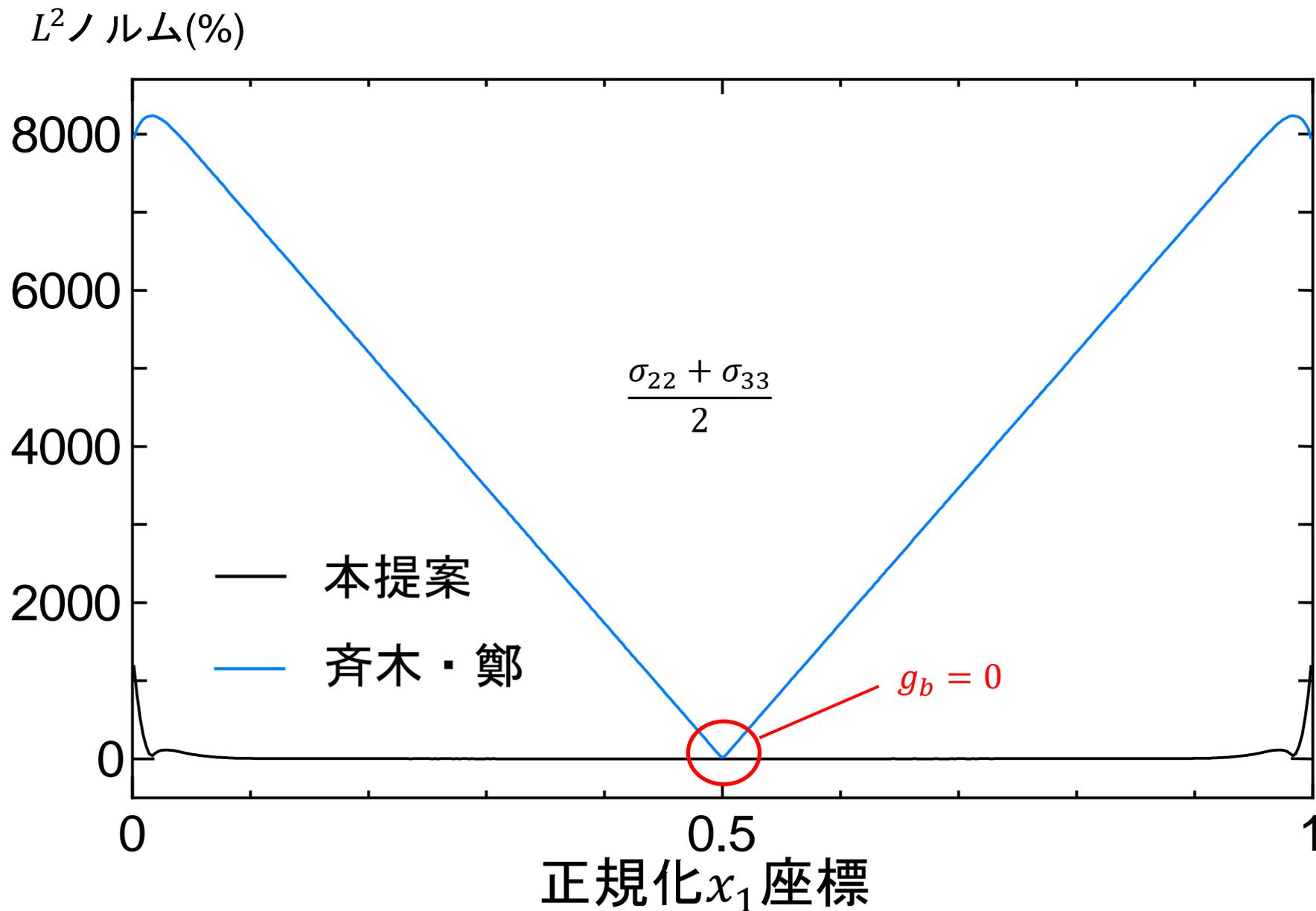




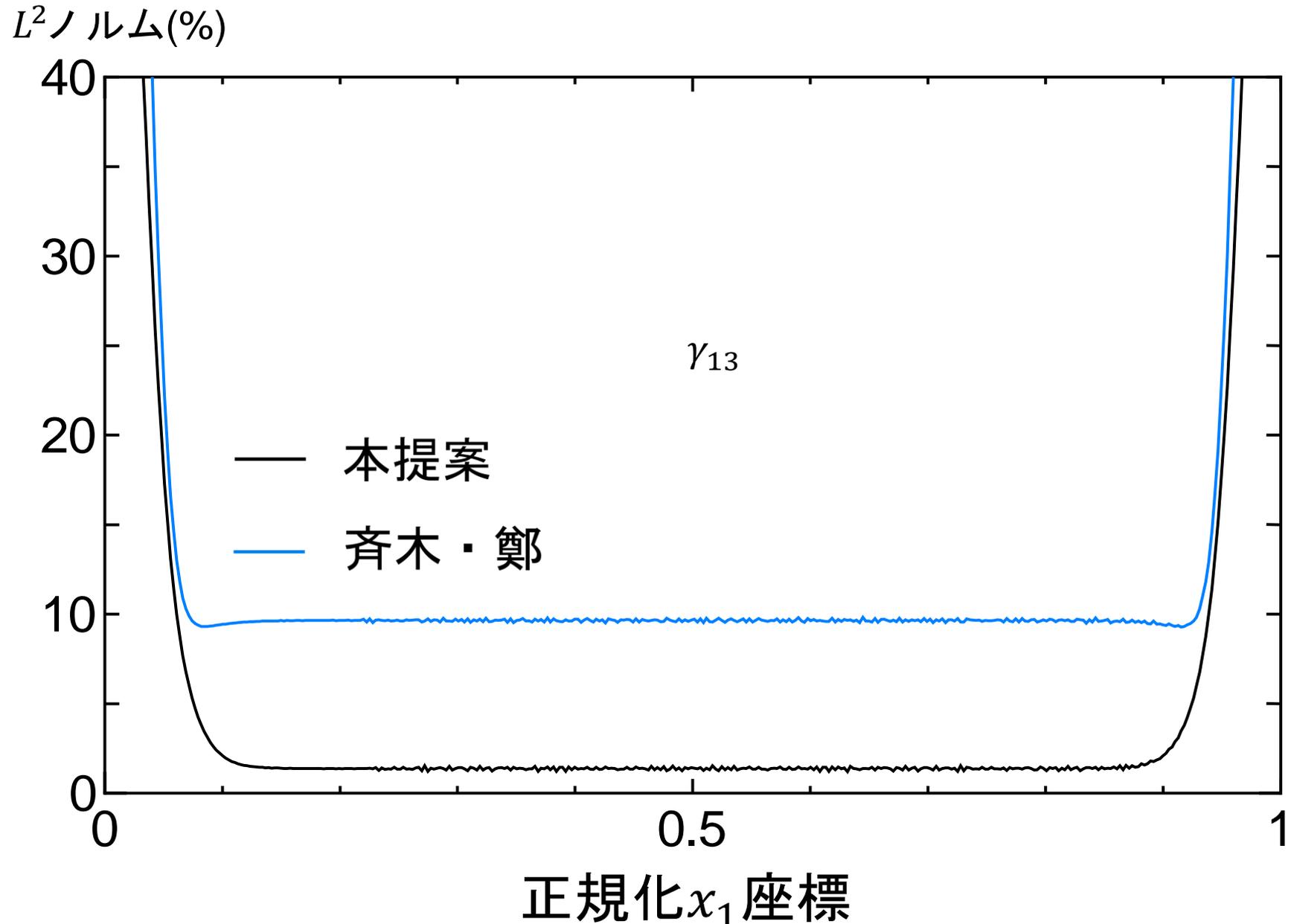




# 曲げとせん断を受ける両端固定梁 ( $L^2$ ノルム分布) 16/12



# 曲げとせん断を受ける両端固定梁 ( $L^2$ ノルム分布) 17/12



$$K_a \tilde{u}_1' + R_{14} \theta' + R_{15} g_s' + R_{16} g_b + R_{17} g_a - N = 0$$

$$-R_{14} \tilde{u}_1' - K_b \theta' - R_1 g_s' - R_6 g_b - R_{18} g_a + M = 0$$

$$\begin{aligned} & -R_{14} \tilde{u}_1'' - K_b \theta'' + K_s \tilde{\gamma} + R_4 g_s \\ & - R_1 g'' + (R_7 - R_6) g_b' + (R_{19} - R_{18}) g_a' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -R_{15} \tilde{u}_1'' - R_1 \theta'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g_s \\ & - R_2 g'' + (R_9 - R_8) g_b' + (R_{21} - R_{20}) g_a' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_{16} \tilde{u}_1'' + R_6 \theta' - R_7 \tilde{\gamma}' \\ & + (R_8 - R_9) g_s' + (R_{11} + R_{12} + R_{13}) g_b \\ & - R_{10} g_b'' + (R_{22} + R_{23} + R_{24}) g_a - R_{25} g_a'' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_{17} \tilde{u}_1'' + R_{18} \theta' - R_{19} \tilde{\gamma}' \\ & + (R_{20} - R_{21}) g_s' + (R_{22} + R_{23} + R_{24}) g_b \\ & - R_{25} g_b'' + (R_{27} + R_{28} + R_{29}) g_a - R_{26} g_a'' = 0 \end{aligned}$$

$$K_a = \int_S A dS$$

$$R_3 = \int_S G \left\{ \left( \frac{\partial f_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_s}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS$$

$$R_9 = \int_S G \left\{ f_{b2} \frac{\partial f_s}{\partial x_2} + f_{b3} \frac{\partial f_s}{\partial x_3} \right\} dS$$

$$K_b = \int_S A x_3^2 dS$$

$$R_4 = \int_S G \left( \frac{\partial f_s}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{10} = \int_S G (f_{b2}^2 + f_{b3}^2) dS$$

$$K_S = \int_S G dS$$

$$R_6 = \int_S B x_3 \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{11} = \int_S A \left\{ \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS$$

$$R_1 = \int_S A x_3 f_s dS$$

$$R_7 = \int_S G f_{b3} dS$$

$$R_{12} = \int_S 2B \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} dS$$

$$R_2 = \int_S A f_s^2 dS$$

$$R_8 = \int_S B f_s \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{13} = \int_S G \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_2} \right)^2 dS$$

剛体回転拘束の条件式より，均質断面では0

$$R_{14} = \int_S A x_3 dS$$

$$R_{20} = \int_S B f_s \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{25} = \int_S G (f_{b2} f_{a2} + f_{b3} f_{a3}) dS$$

$$R_{15} = \int_S A f_s dS$$

$$R_{21} = \int_S G \left( f_{a2} \frac{\partial f_s}{\partial x_2} + f_{a3} \frac{\partial f_s}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{26} = \int_S G (f_{a2}^2 + f_{a3}^2) dS$$

$$R_{16} = \int_S B \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{22} = \int_S A \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{27} = \int_S A \left\{ \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS$$

$$R_{17} = \int_S B \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{23} = \int_S B \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_2} \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{28} = \int_S 2B \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} dS$$

$$R_{18} = \int_S B x_3 \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_3} \right) dS$$

$$R_{24} = \int_S G \left( \frac{\partial f_{b2}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{b3}}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_2} \right) dS$$

$$R_{29} = \int_S G \left( \frac{\partial f_{a2}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{a3}}{\partial x_2} \right)^2 dS$$

$$R_{19} = \int_S G f_{a3} dS$$

$$A = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad B = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

単位の横せん断変形を与えた代表体積要素において  
弾性エネルギー密度とせん断力による仕事が等しいことから

$$(K_s \tilde{\gamma} + R_4 g_s) \tilde{\gamma} = R_3 g_s^2 + 2\tilde{\gamma} g_s R_4 + K_s \tilde{\gamma}^2$$

$$R_4 = R_3 + 2R_4 \quad \Rightarrow \quad R_4 = -R_3$$

単位の曲げ変形を与えた代表体積要素において  
弾性エネルギー密度と曲げによる仕事が等しいことから

$$(K_b \theta' + R_6 g_b) \theta' = K_b \theta'^2 + R_{11} g_b^2 + 2R_6 g_b \theta' + R_{12} g_b^2$$

$$R_6 = 2R_6 + R_{11} + R_{12} \quad \Rightarrow \quad R_{11} + R_{12} = -R_6$$

単位の軸変形を与えた代表体積要素において  
弾性エネルギー密度と軸力による仕事が等しいことから

$$(K_a u'_1 + R_{17} g_a) u'_1 = K_a u_1'^2 + R_{27} g_a^2 + 2R_{17} g_a u'_1 + R_{28} g_a^2$$

$$R_{17} = 2R_{17} + R_{27} + R_{28} \quad \Rightarrow \quad R_{27} + R_{28} = -R_{17}$$

# 曲げ剛性と軸剛性

単位の軸変形を与えた代表体積要素において，定義より

$$K_a + R_{17} = \int_S A dS + \int_S \sigma_1 dS - \int_S A dS = \int_S \sigma_1 dS$$

$$N = K_{aeq} \frac{d\tilde{u}_1}{dx_1}$$

$$K_{aeq} = N = \int_S \sigma_1 dS = K_a + R_{17}$$

単位の曲げ変形を与えた代表体積要素において，定義より

$$K_b + R_6 = \int_S A x_3^2 dS + \int_S x_3 \sigma_1 dS - \int_S A x_3^2 dS = \int_S x_3 \sigma_1 dS$$

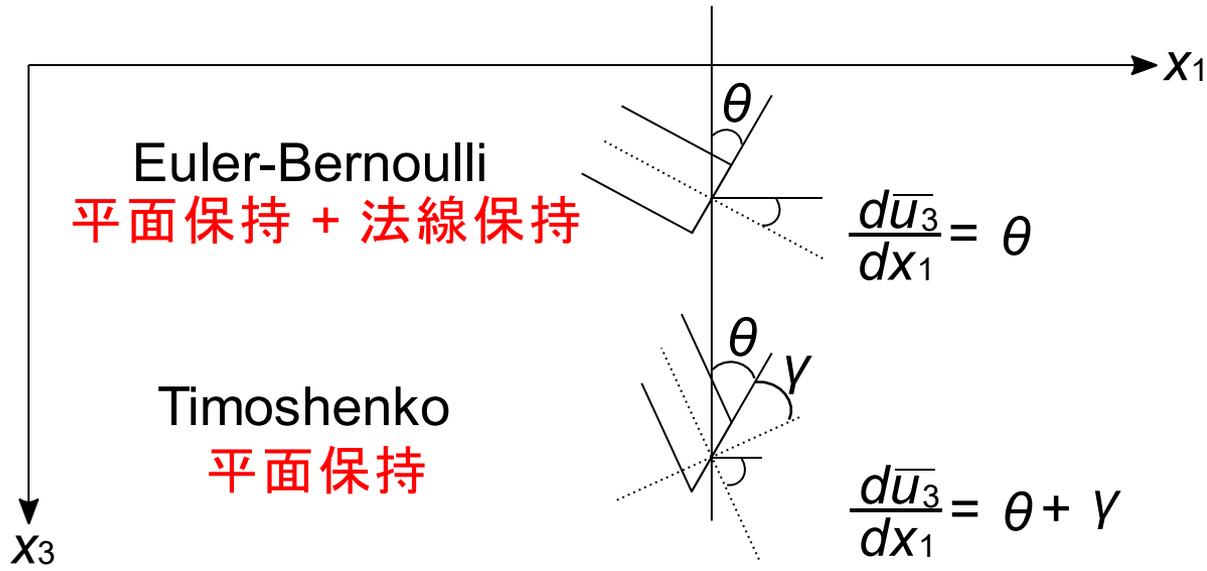
$$M = K_{beq} \frac{d\theta}{dx_1}$$

$$K_{beq} = M = \int_S x_3 \sigma_1 dS = K_b + R_6$$

$$\begin{pmatrix}
 \frac{K_a}{l} & 0 & \frac{R_{14}}{l} & \frac{R_{15}}{l} & -\frac{R_{16}}{2} & -\frac{R_{17}}{2} & -\frac{K_a}{l} & 0 & -\frac{R_{14}}{l} & -\frac{R_{15}}{l} & -\frac{R_{16}}{2} & -\frac{R_{17}}{2} \\
 \frac{6}{F\alpha} & -\frac{3}{la} & -\frac{3R_4}{laK_S} & \frac{R_6}{l} - \frac{6(R_6-R_7)}{F\alpha K_S} & \frac{R_{18}}{l} - \frac{6(R_{18}-R_{19})}{F\alpha K_S} & 0 & -\frac{6}{F\alpha} & -\frac{3}{la} & -\frac{3R_4}{laK_S} & -\frac{R_6}{l} + \frac{6(R_6-R_7)}{F\alpha K_S} & -\frac{R_{18}}{l} + \frac{6(R_{18}-R_{19})}{F\alpha K_S} \\
 \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3K_b}{F K_S}\right) & \frac{R_1}{l} + \frac{3R_4}{2\alpha K_S} & -R_6 + \frac{3(R_6-R_7)}{laK_S} & -R_{18} + \frac{3(R_{18}-R_{19})}{laK_S} & -\frac{R_{14}}{l} & \frac{3}{la} & \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{6K_b}{F K_S}\right) & -\frac{R_1}{l} + \frac{3R_4}{2\alpha K_S} & -\frac{3(R_6-R_7)}{laK_S} & -\frac{3(R_{18}-R_{19})}{laK_S} \\
 \frac{R_5}{l} + \frac{R_d}{3} - \frac{R_1^2 l^2}{8\alpha K_b K_S} & -\frac{R_8}{2} - \frac{R_9}{2} - \frac{R_4(R_6-R_7)l}{4\alpha K_b K_S} & -\frac{R_{20}}{2} - \frac{R_{21}}{2} - \frac{R_4(R_{18}-R_{19})l}{4\alpha K_b K_S} & -\frac{R_{18}}{l} & \frac{3R_4}{laK_S} & -\frac{R_1}{l} + \frac{3R_4}{2\alpha K_S} & -\frac{R_5}{l} + \frac{R_d}{6} - \frac{R_1^2 l^2}{8\alpha K_b K_S} & -\frac{R_6}{2} + \frac{R_9}{2} + \frac{R_4(R_6-R_7)l}{4\alpha K_b K_S} & -\frac{R_{20}}{2} + \frac{R_{21}}{2} + \frac{R_4(R_{18}-R_{19})l}{4\alpha K_b K_S} \\
 \frac{(R_{11}+R_{12}+R_{13})l}{3} + \frac{R_{10}}{l} - \frac{(R_6-R_7)^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{22}+R_{23}+R_{24})l}{3} + \frac{R_{25}}{l} - \frac{(R_6-R_7)(R_{18}-R_{19})}{2\alpha K_b K_S} & \frac{R_{16}}{2} & -\frac{R_6}{l} + \frac{6(R_6-R_7)}{F\alpha K_S} & \frac{3(R_6-R_7)}{laK_S} & \frac{R_8}{2} - \frac{R_9}{2} - \frac{R_4(R_6-R_7)l}{4\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{11}+R_{12}+R_{13})l}{6} - \frac{R_{10}}{l} + \frac{(R_6-R_7)^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{22}+R_{23}+R_{24})l}{6} - \frac{R_{25}}{l} + \frac{(R_6-R_7)(R_{18}-R_{19})}{2\alpha K_b K_S} \\
 \frac{(R_{27}+R_{28}+R_{29})l}{3} + \frac{R_{30}}{l} - \frac{(R_{18}-R_{19})^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{R_{17}}{2} & -\frac{R_{18}}{l} + \frac{6(R_{18}-R_{19})}{F\alpha K_S} & \frac{3(R_{18}-R_{19})}{laK_S} & \frac{R_{20}}{2} - \frac{R_{21}}{2} - \frac{R_4(R_{18}-R_{19})l}{4\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{22}+R_{23}+R_{24})l}{6} - \frac{R_{25}}{l} + \frac{(R_6-R_7)(R_{18}-R_{19})}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{27}+R_{28}+R_{29})l}{6} - \frac{R_{30}}{l} + \frac{(R_{18}-R_{19})^2}{2\alpha K_b K_S} \\
 \frac{K_a}{l} & 0 & \frac{R_{14}}{l} & \frac{R_{15}}{l} & \frac{R_{16}}{2} & \frac{R_{17}}{2} \\
 \frac{6}{F\alpha} & \frac{3}{la} & \frac{3R_4}{laK_S} & \frac{R_6}{l} - \frac{6(R_6-R_7)}{F\alpha K_S} & \frac{R_{18}}{l} - \frac{6(R_{18}-R_{19})}{F\alpha K_S} \\
 \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3K_b}{F K_S}\right) & \frac{R_1}{l} + \frac{3R_4}{2\alpha K_S} & R_6 - \frac{3(R_6-R_7)}{laK_S} & R_{18} - \frac{3(R_{18}-R_{19})}{laK_S} \\
 \frac{R_5}{l} + \frac{R_d}{3} - \frac{R_1^2 l^2}{8\alpha K_b K_S} & -\frac{R_8}{2} + \frac{R_9}{2} - \frac{R_4(R_6-R_7)l}{4\alpha K_b K_S} & \frac{R_{20}}{2} + \frac{R_{21}}{2} + \frac{R_4(R_{18}-R_{19})l}{4\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{11}+R_{12}+R_{13})l}{3} + \frac{R_{10}}{l} - \frac{(R_6-R_7)^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{22}+R_{23}+R_{24})l}{3} + \frac{R_{25}}{l} - \frac{(R_6-R_7)(R_{18}-R_{19})}{2\alpha K_b K_S} \\
 \frac{(R_{27}+R_{28}+R_{29})l}{3} + \frac{R_{30}}{l} - \frac{(R_{18}-R_{19})^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{11}+R_{12}+R_{13})l}{3} + \frac{R_{10}}{l} - \frac{(R_6-R_7)^2}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{22}+R_{23}+R_{24})l}{3} + \frac{R_{25}}{l} - \frac{(R_6-R_7)(R_{18}-R_{19})}{2\alpha K_b K_S} & \frac{(R_{27}+R_{28}+R_{29})l}{3} + \frac{R_{30}}{l} - \frac{(R_{18}-R_{19})^2}{2\alpha K_b K_S}
 \end{pmatrix}$$

Symm.

$$\begin{pmatrix}
 (\tilde{u}_1)_1^e \\
 (\tilde{u}_3)_1^e \\
 (\theta)_1^e \\
 (g_s)_1^e \\
 (g_b)_1^e \\
 (g_a)_1^e \\
 (\tilde{u}_1)_2^e \\
 (\tilde{u}_3)_2^e \\
 (\theta)_2^e \\
 (g_s)_2^e \\
 (g_b)_2^e \\
 (g_a)_2^e
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{pl}{2} + H_1 \\
 \frac{ql}{2} + V_1 \\
 -\frac{q^2}{12} + M_1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{pl}{2} + H_2 \\
 \frac{ql}{2} + V_2 \\
 \frac{q^2}{12} + M_2 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$



Euler-Bernoulli

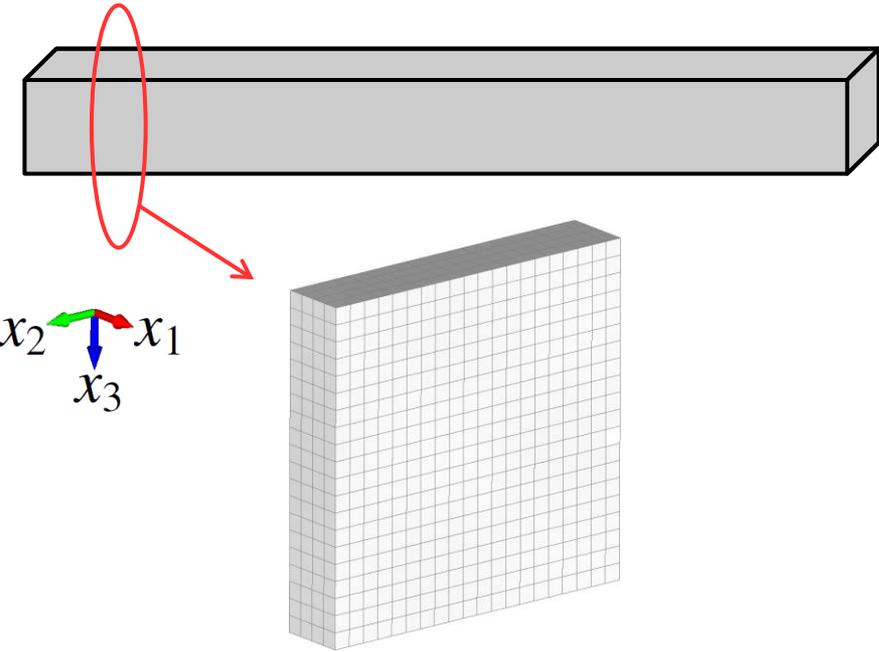
$$u_1 = -x_3 \theta = -x_3 \frac{d\bar{u}_3}{dx_1}$$

Timoshenko

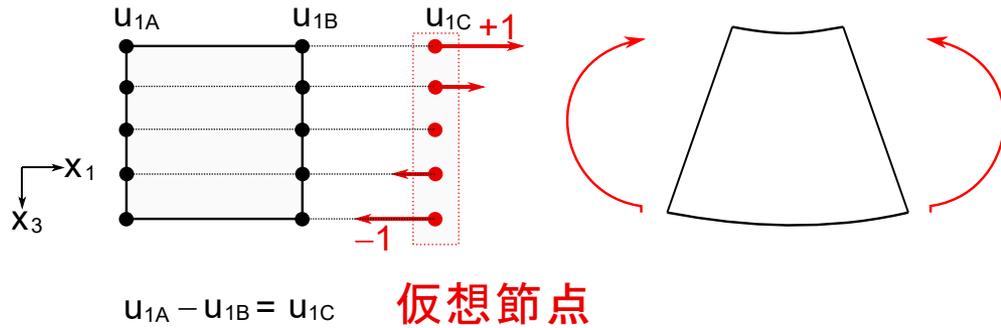
$$u_1 = -x_3 \theta = x_3 \left( \gamma - \frac{d\bar{u}_3}{dx_1} \right)$$

# 代表体積要素

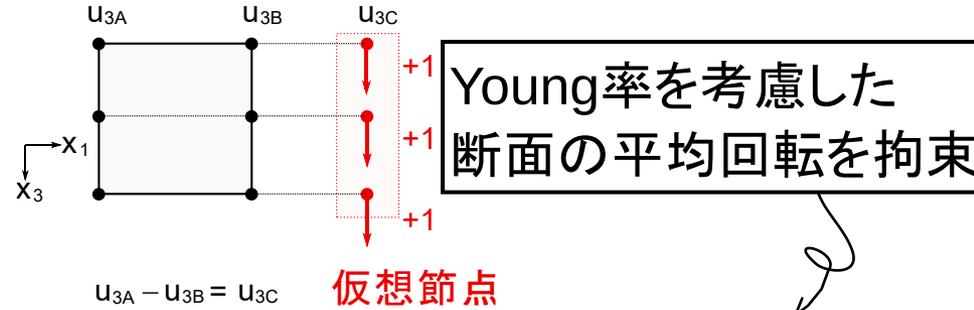
連続体要素に周期境界条件で相対変位を与え、純曲げや純せん断を再現  
 → 断面変形のモードを求めることができる



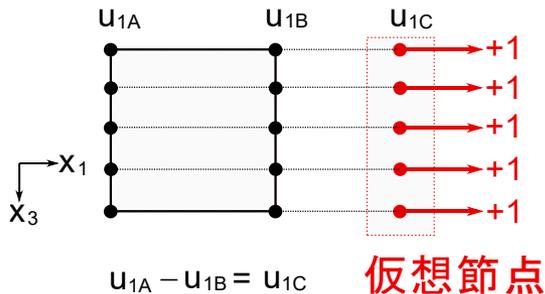
## 曲げ

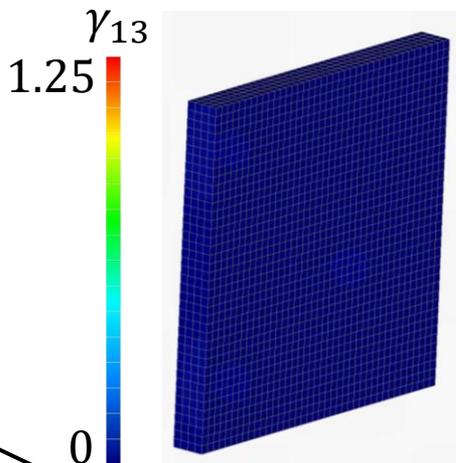


## 横せん断



## 軸変形





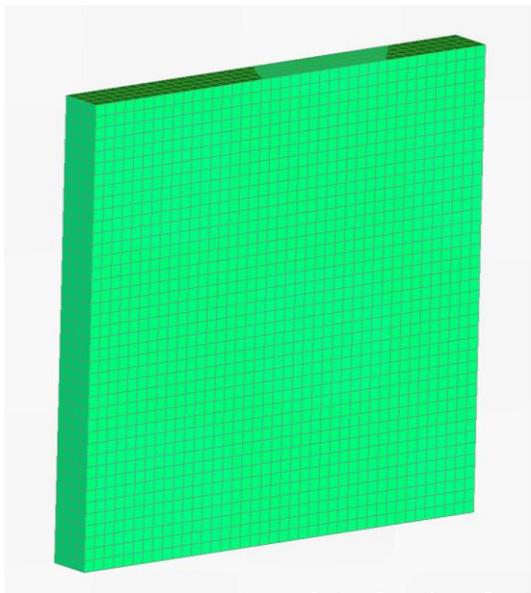
せん断

断面の  $x_1$  軸方向変位を  $f_s$  とする

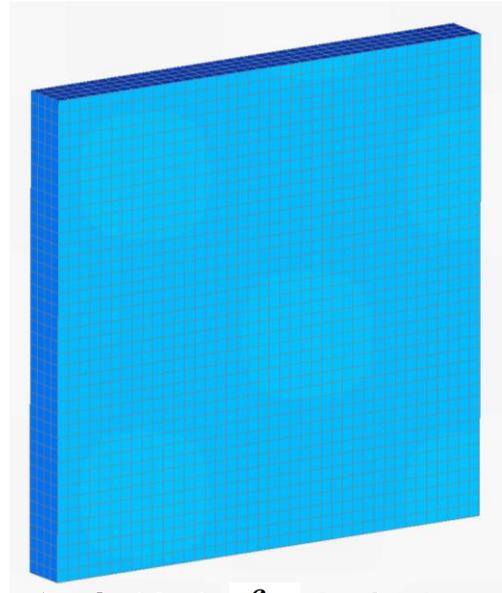
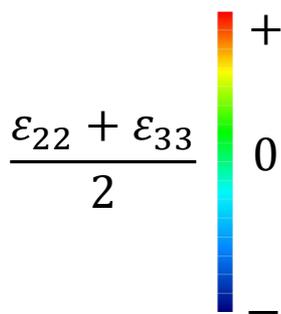
曲げ

軸変形

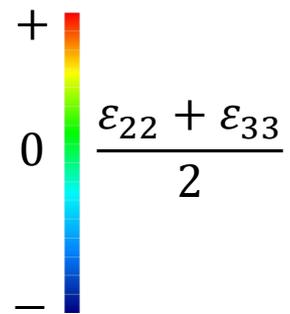
変形モードを含む断面積分を実行することで支配方程式を解くのに必要な断面パラメタを求める



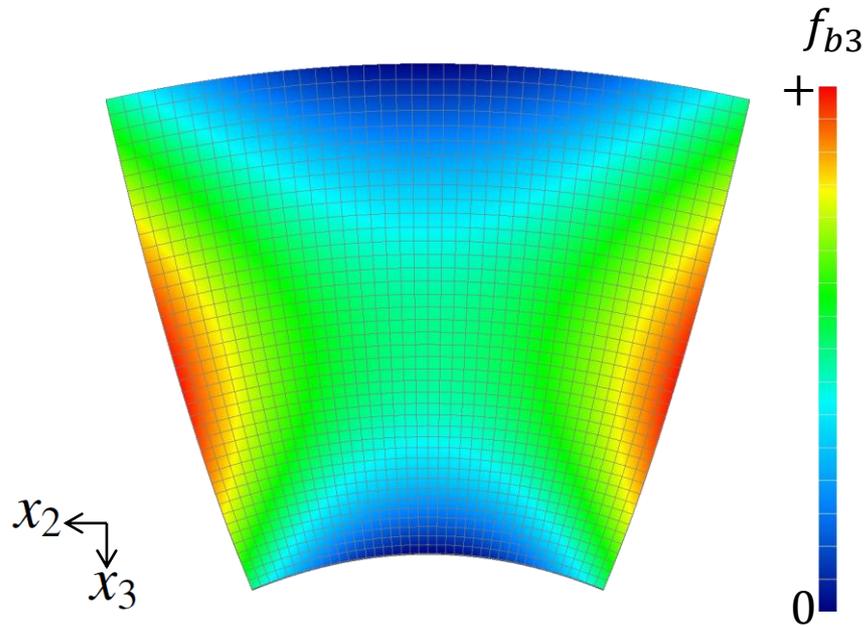
断面の  $x_2$  軸方向変位を  $f_{b2}$  とする  
断面の  $x_3$  軸方向変位を  $f_{b3}$  とする



断面の  $x_2$  軸方向変位を  $f_{a2}$  とする  
断面の  $x_3$  軸方向変位を  $f_{a3}$  とする



# $f_{b3}$ の断面積分



単位の曲げを受ける代表体積要素

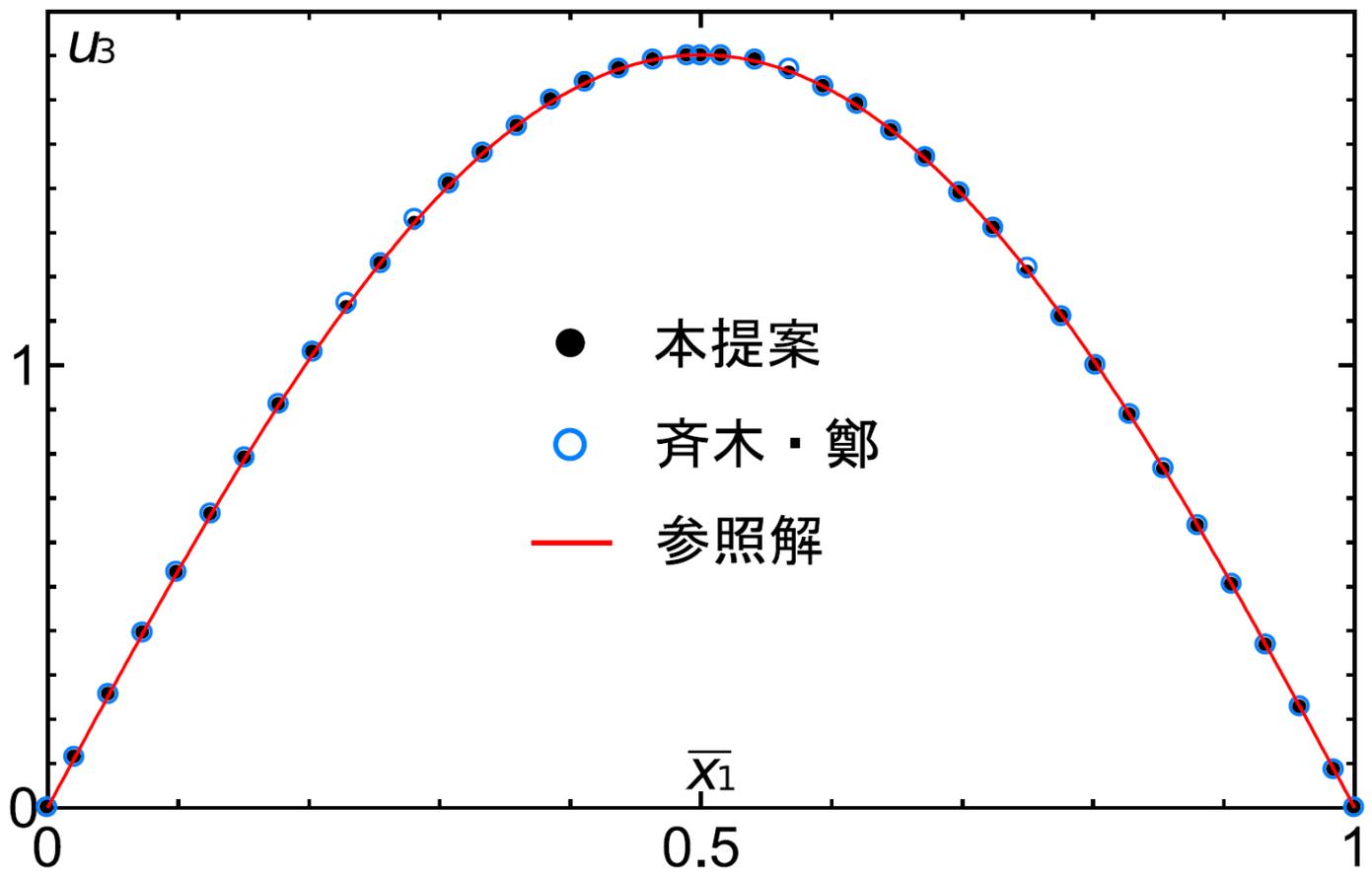
$$\nu = 0.3$$

$$\int f_{b3} dS < 0$$

曲げに伴うPoisson効果による $x_3$ 方向の変位の積分は**負**

曲げによって生じる断面の平均たわみとは逆方向の平均変位がPoisson効果によって生じる

$[1 \times 10^{-6}]$



		斉木・鄭	本提案	参照解
$\nu = 0$	最大たわみ (m)	$1.69342 \times 10^{-6}$	-	$1.69338 \times 10^{-6}$
	最大たわみの相対差 (%)	$2.07 \times 10^{-3}$	-	-
	$L^2$ (%)	$2.04 \times 10^{-3}$	-	-
$\nu = 0.3$	最大たわみ (m)	$1.70377 \times 10^{-6}$	$1.70187 \times 10^{-6}$	$1.70175 \times 10^{-6}$
	最大たわみの相対差 (%)	$1.19 \times 10^{-1}$	$6.99 \times 10^{-3}$	-
	$L^2$ (%)	$1.22 \times 10^{-1}$	$9.67 \times 10^{-3}$	-

	平均的な曲げ剛性 $K_{beq}$ (kg · m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )	平均的なせん断剛性 $K_{seq}$ (kg · m/s <sup>2</sup> )
$\nu = 0$	$1.04 \times 10^9$	$2.08 \times 10^{10}$
$\nu = 0.3$	$1.04 \times 10^9$	$1.60 \times 10^{10}$
相対差 (%)	$5.56 \times 10^{-6}$	$-2.31 \times 10^1$

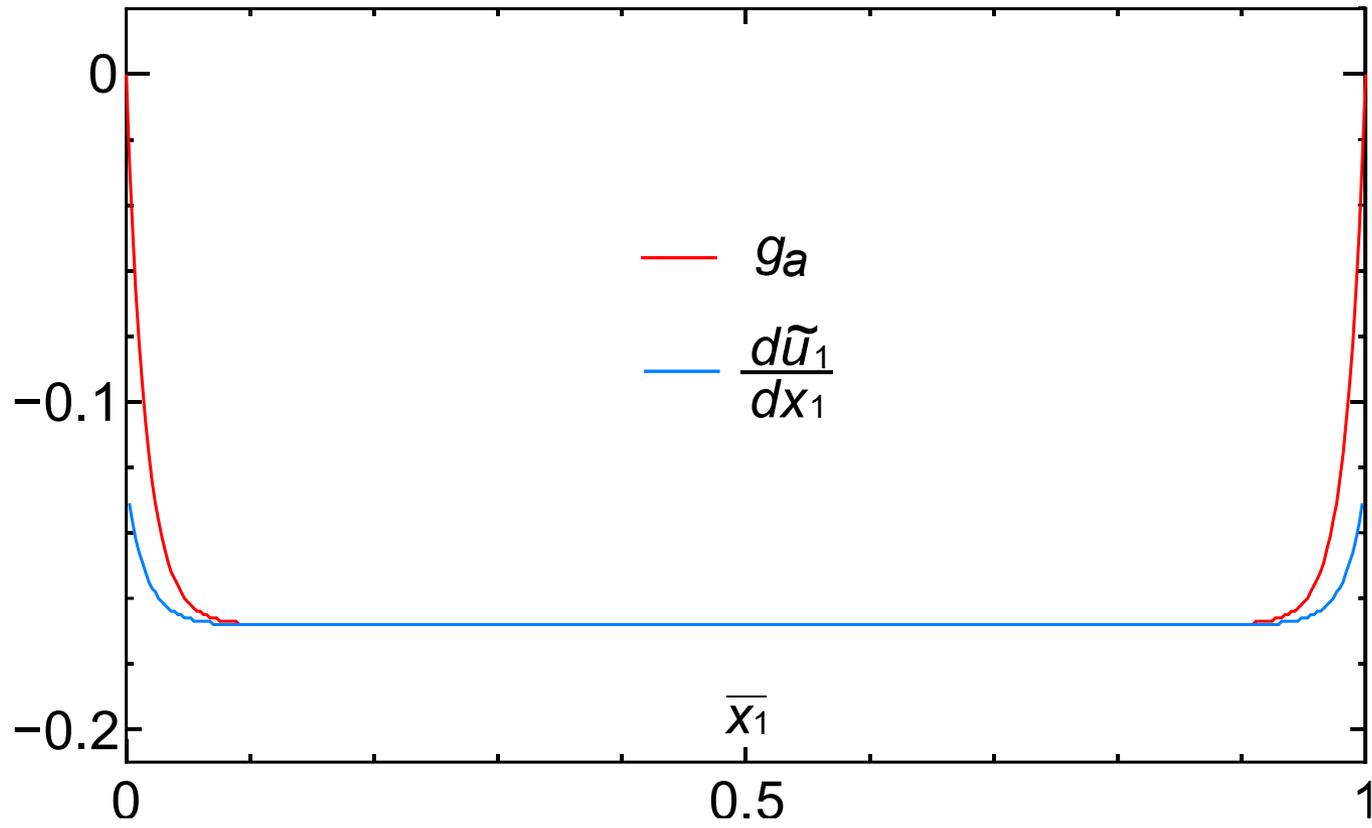
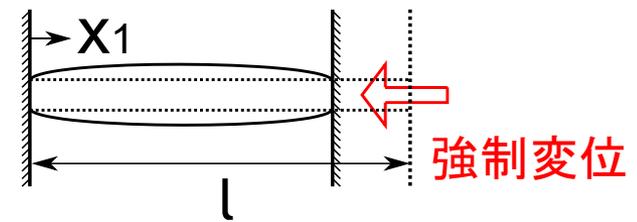
均質断面なら斉木・鄭の手法と本手法の曲げ剛性はほぼ同じ



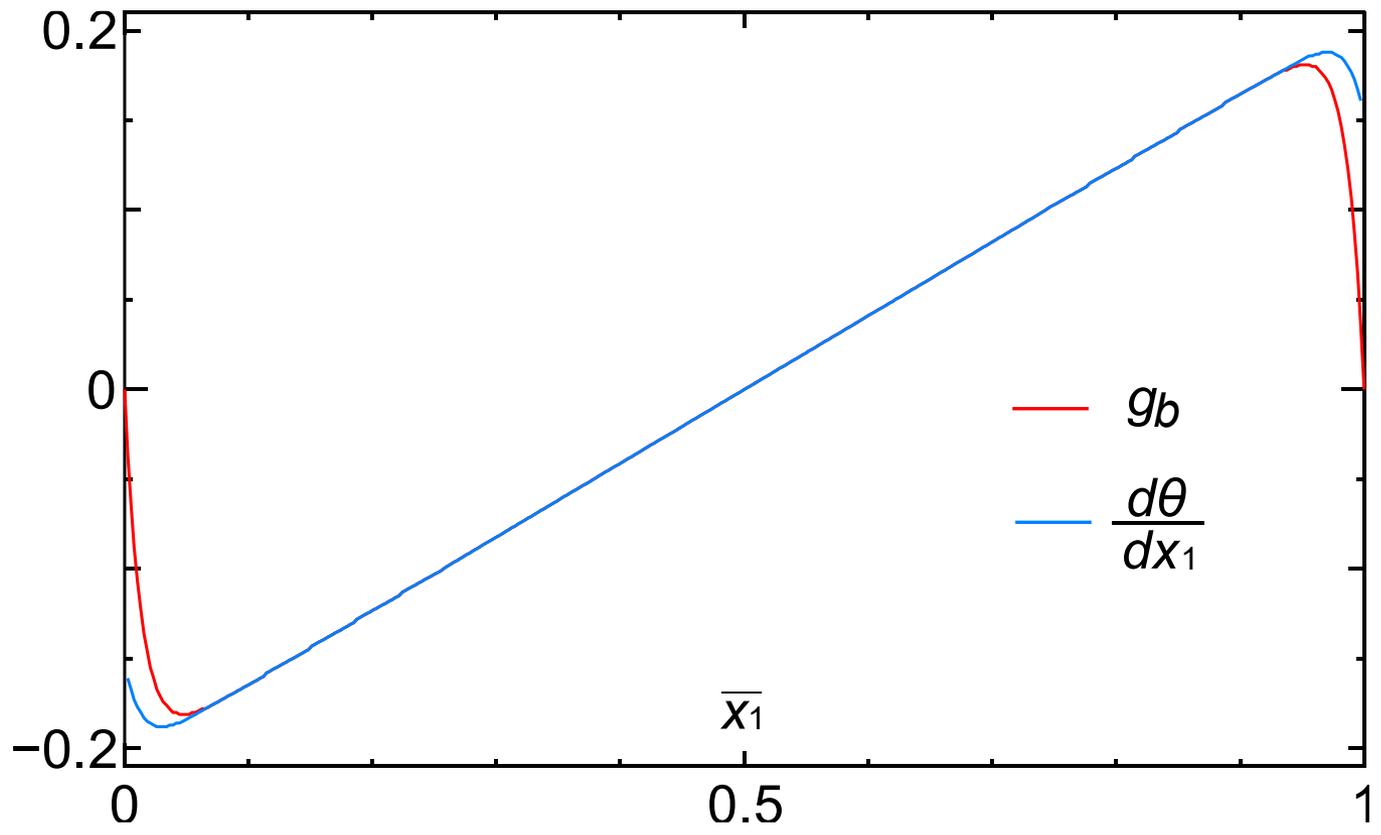
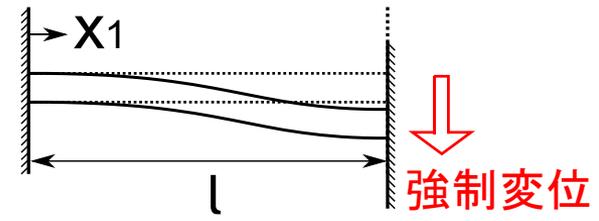
Poisson比の有無によるせん断剛性の低下や上昇は、せん断弾性係数を介して斉木・鄭の手法でも考慮可能



本提案手法が斉木・鄭の手法よりもたわみが小さいのは  
**Poisson効果の影響を考慮しているため**



本提案は固定端での断面変形の拘束を考慮できている



本提案は固定端での断面変形の拘束を考慮できている