

断面変形を考慮した梁理論に基づく せん断遅れによる付加的な応力の評価

An evaluation of additional stress due to shear lag
based on a beam theory considering cross-sectional deformation

三井涼平*
Ryohei MITSUI

*構造強度学研究室（指導教員：齊木功 准教授）

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は、せん断遅れのために一様ではなく、ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる。道路橋示方書では、有効幅により曲げ剛性を小さくすることでそれを考慮している。しかし、近年提案されているせん断遅れと横せん断による断面変形を考慮できる梁理論により、せん断遅れは曲げではなく、せん断変形に起因する断面変形によって生じることが明らかにされた。したがって、断面変形を考慮することでフランジにおける曲げ応力分布をより正確に評価することが可能になると考えた。そこで、断面変形に起因する付加的な応力を評価することを目的とし、解析のおよび数値的な検討を行った。

Key Words: shear lag, deformation of cross section, box girder

1. はじめに

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は、せん断遅れのために一様ではなく、ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる。橋梁の設計においては、応力の照査が主となることから、一般的に有効幅により見掛け上の曲げ剛性を小さくすることでせん断遅れが考慮される。

梁理論を拡張し、せん断遅れ変形を直接取り入れた理論は、Reissner¹⁾により提案された。その後、齊木・鄭²⁾は、せん断遅れと横せん断による断面変形を统一的に考慮できる梁理論を提案している。この方法では、代表体積要素に一様せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード f として用いている。そして、得られた f から決定される断面変形パラメータを用いて、たわみや軸ひずみなどの解析解が求められる。この梁理論によると、せん断遅れは曲げではなく、せん断変形に起因する断面変形によって生じる。したがって、断面変形を考慮することでフランジにおける曲げ応力分布をより正確に評価することが可能になると考えた。

そこで、断面変形を考慮した梁理論²⁾で提案されている方法を用いて、パラメトリックスタディを実施し、断面形状や寸法と、断面変形パラメータとの相関を示し、断面変形に起因する付加的なひずみ算定のための推定式を提案を行う。

2. 断面変形を考慮した梁の軸ひずみ

この章では、梁のせん断遅れ変形と横せん断変形による断面変形を统一的に考慮可能な梁理論²⁾による軸ひずみの解析解を示す。図-1のように単純支持されて

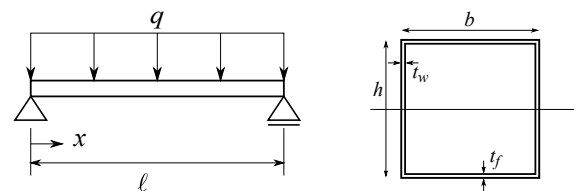


図-1 等分布荷重載荷の単純梁

図-2 箱断面

等分布荷重 q を受けるときの軸ひずみの解析解は、梁の断面の回転を $\theta(x)$ 、断面変形の大きさを $g(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= z\theta' + fg' \\ &= \frac{qz}{K_b} \left(\frac{1}{2}\ell x - \frac{1}{2}x^2 \right) \\ &\quad + q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \frac{e^{-\frac{k}{2}x} e^{kx} + e^{\frac{k}{2}x} e^{-kx}}{e^{\frac{k}{2}x} + e^{-\frac{k}{2}x}} - q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \end{aligned} \quad (1)$$

と表される。ここに、 e は Napier 数、 K_b は曲げ剛性、 k 、 K_{seq} は断面変形モード f から得られる断面変形パラメータである。右辺の第 1 項は Euler 梁の曲げによるひずみ、第 2 項以降が断面変形に起因する付加的なひずみである。式 (1) に示すように、軸ひずみは f/K_{seq} と k に比例する。また、支間中央部においては、第 2 項はその他の項と比較して相対的に小さく、 f/K_{seq} が支配的である。

3. 断面形状が断面変形パラメータに及ぼす影響

せん断遅れと横せん断による断面変形が曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として、図-2 に示す単一材料の箱断面を選択する。この箱断面に対して、断面変形梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード $f(x_2, x_3)$ を求めるために、文献³⁾に基づき代表

[1×10^{-10}]

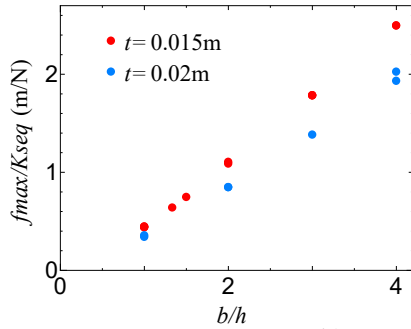


図-3 f_{\max}/K_{seq} と b/h の関係

体積要素に単位の横せん断変形を与えた。代表体積要素は1次6面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。図-2において、 b は断面幅、 h は断面高さ、 t_f はフランジ厚、 t_w はウェブ厚を表す。これらのパラメータを変化させ、 f/K_{seq} との相関を検討する。断面の幅 b は $1\text{ m} \leq b \leq 8\text{ m}$ 、高さ h は $0.5\text{ m} \leq h \leq 4\text{ m}$ の範囲で変化させ、アスペクト比 b/h は $1 \leq b/h \leq 4$ とした。板厚に関しては、 $10\text{ mm} \leq t_f \leq 40\text{ mm}$ 、 $10\text{ mm} \leq t_w \leq 40\text{ mm}$ の範囲で変化させた。

設計において問題となる最大ひずみに着目する。初等梁理論の曲げによるひずみは、断面の中立面から最も離れた位置で最大になり、橋軸直角水平方向に一様である。また、前述のように、支間中央部においては、断面変形に起因する付加的なひずみは、 f/K_{seq} が支配的である。そこで、フランジ上面の断面変形モード f の最大値を f_{\max} として、 f_{\max}/K_{seq} の推定について述べる。

$t_f = t_w$ として、 f_{\max}/K_{seq} とアスペクト比 b/h の関係を、 $t = 0.015\text{ m}, 0.020\text{ m}$ について、図-3に示す。図-3から、 $1 < b/h < 4$ の範囲では、 f_{\max}/K_{seq} は b/h とほぼ線形の関係になっている。

同様に、板厚 t_f および t_w に関して f_{\max}/K_{seq} との相関を検討した。その結果、 f_{\max}/K_{seq} を b/h 、 $1/t_f$ 、 t_w の多項式で表すこととし、各項の係数を最小二乗法で決定した。相関係数は0.997であった。

4. 単純梁による精度検証

構築した推定式の精度を検証する。箱断面の寸法は幅 $b = 4.5\text{ m}$ 、高さ $h = 1.5\text{ m}$ 、板厚 $t_w = 20\text{ mm}$ 、 $t_f = 30\text{ mm}$ とした。材料のYoung率は $E = 2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ 、Poisson比はゼロとした。図-1に示す単純支持梁の境界値問題を考え、 $\ell = 20\text{ m}$ として、通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする。また、道路橋示方書と比較するために、有効幅を用いて断面形状を定義し、Euler梁と同様にして解を求めた。参照解を基準とした相対差を表-1に示す。本論文で提案した推定式は、斉木・鄭の断面変形梁²⁾と同様に示方書より良い精度で参照解を再現できている。

Euler梁はせん断遅れを考慮していない梁理論である。そこで、せん断遅れによる付加的な軸ひずみ ϵ_{sl} を、各

表-1 ウェブ上の軸ひずみ相対差の比較 (支間中央)

本提案	断面変形梁 ²⁾	Euler 梁	示方書
5.69×10^{-3}	5.86×10^{-5}	-6.01×10^{-2}	6.28×10^{-2}

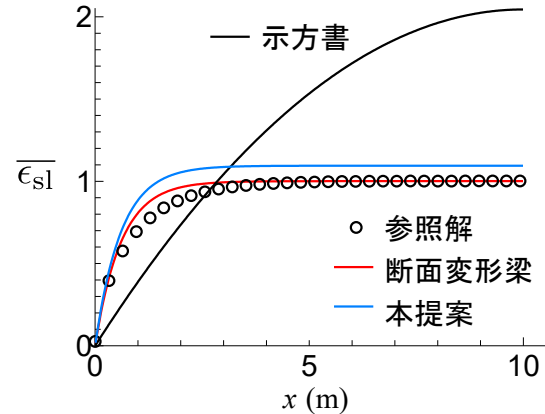


図-4 付加的な軸ひずみ

手法による解 β_p とEulerの解 β_{Euler} との差

$$\epsilon_{\text{sl}} = \beta_p - \beta_{\text{Euler}} \quad (2)$$

と定義する。本提案、参照解および示方書による付加的な軸ひずみ ϵ_{sl} の橋軸方向分布を図-4に示す。それぞれの付加的な軸ひずみは参照解の支間中央の付加的な軸ひずみにより無次元化している。示方書は付加的な軸ひずみが曲げに比例するとし、有効幅により見掛け上の曲げ剛性を小さくすることで、せん断遅れを考慮している。そのため、示方書は付加的なひずみを支間中央部では過大評価し、支点付近では過小評価している。一方で本推定式は断面変形梁理論と同様に、参照解のせん断遅れによる付加的な軸ひずみの橋軸方向分布を再現できている。このことと、式(1)に示したように断面変形梁による付加的な軸ひずみが fg' となることから、せん断遅れは曲げではなく、せん断変形に起因する断面変形によって生じることがわかる。

5. 結論

箱断面を対象に、斉木・鄭のせん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論²⁾で用いる断面変形パラメータと、断面形状との相関を明らかにした。また、断面変形パラメータの推定式を提案し、断面変形に起因する付加的なひずみとして従来の方法よりも精度よく再現することができた。

参考文献

- 1) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.
- 2) 斉木功, 鄭勳: せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.
- 3) 斉木功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.L3-L11, 2018.

(2021年2月8日提出)