

---

2020年度修士論文発表会

断面変形を考慮した梁の  
動的特性に関する基礎的検討

構造強度学研究室

星屋美優

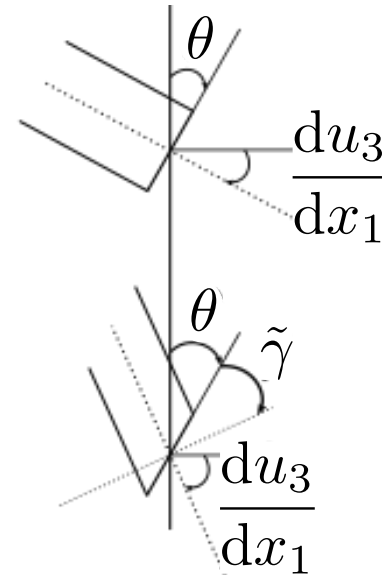
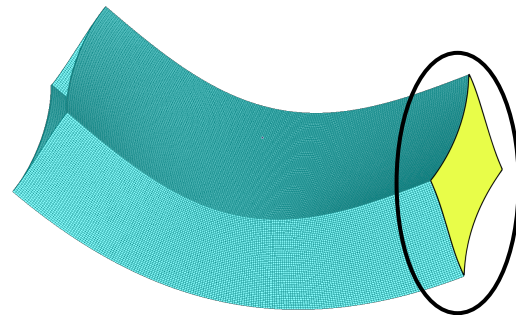
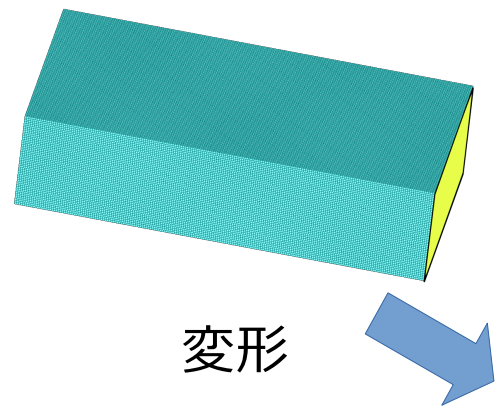
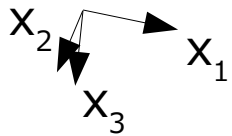
2021年2月9日

---

## 梁理論

1750 Euler-Bernoulli →せん断変形を無視

1921 Timoshenko →せん断変形を考慮  
断面平面保持



実際には直線ではない  
断面変形

1946 Reissener

→フランジの軸方向変位の幅方向分布を放物線と仮定

2021 齊木・鄭

→均質化梁理論によってせん断による断面変形を考慮

## 梁の動的特性

Euler-Bernoulli: 変位に関する慣性

Rayleigh: Euler-Bernoulli + 断面の回転慣性

Timoshenko: Rayleigh + せん断変形

Timoshenko梁の動的特性に関する研究は盛んに行われている

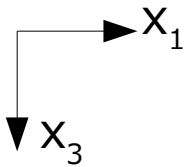
1999 Han *et al.*:

曲げの波長が短くなる

→せん断変形の影響が大きくなる

断面の大きさが相対的に大きくなる

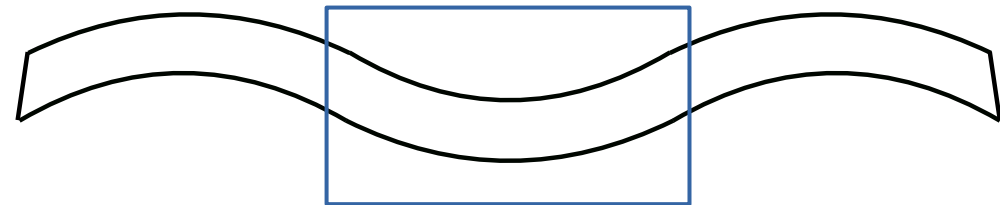
→断面変形の影響が大きくなるのでは



1次の振動モード



高次の振動モード



断面変形を考慮した梁の動的効果を含めた定式化を行い、従来の梁と比較する

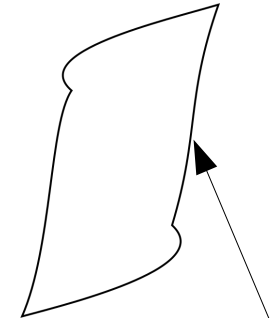
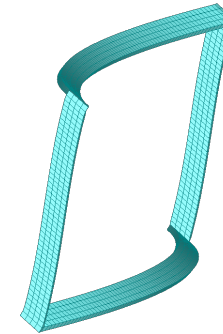
## 変位

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = x_3\theta(x_1, t) + f(x_2, x_3)g(x_1, t)$$

断面変形の大きさ

断面変形による変位

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_3(x_1, t)$$



$f$ : 断面変形モード

## ひずみ

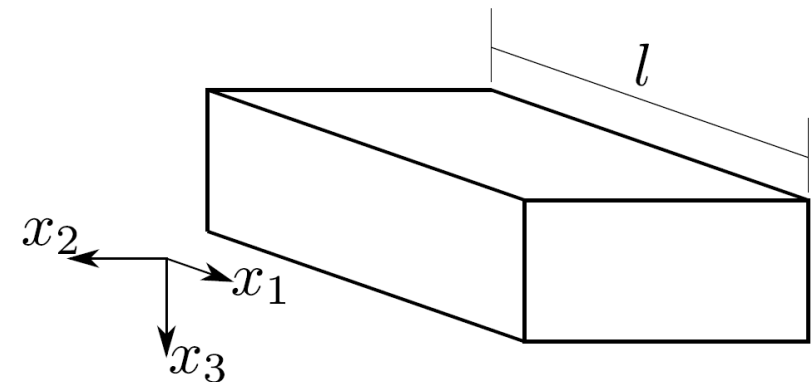
$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3\theta' + fg'$$

$$(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

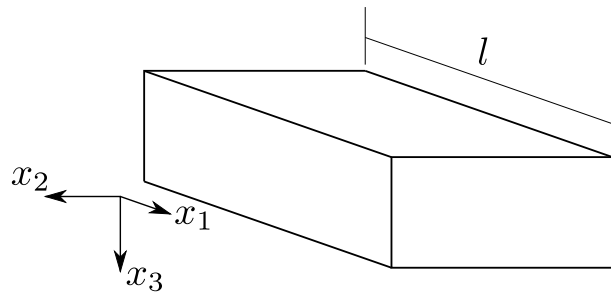
$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}g$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \tilde{\gamma} + \frac{\partial f}{\partial x_3}g$$



## 仮想仕事式

$$\int_V \left\{ \underbrace{E\epsilon_1\delta\epsilon_1 + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})}_{\text{ひずみによる仕事}} + \underbrace{\rho(\ddot{u}_1\delta u_1 + \ddot{u}_3\delta u_3)}_{\text{慣性力による仕事}} \right\} dV$$



$$= \underbrace{\int_L q\delta u_3 dx_1 + \left\{ \int_A (p_1\delta u_1 + p_3\delta u_3) dA \right\} \Big|_{x_1=0,l}}_{\text{外力による仕事}}$$

$$\dot{(\cdot)} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$$

$$(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ E \left\{ (x_3^2\theta' + fg'x_3)\delta\theta' + (x_3\theta'f + f^2g')\delta g' \right\} \right. \\ & \quad + G \left\{ (f_{,2})^2g\delta g + (\tilde{\gamma} + f_{,3}g)(\delta\tilde{\gamma} + f_{,3}\delta g) \right\} \\ & \quad \left. + \rho \left\{ (x_3\ddot{\theta} + f\ddot{g})(x_3\delta\theta + f\delta g) + \ddot{u}_3\delta u_3 \right\} \right] dV \\ & = \int_L q\delta u_3 dx_1 + \left\{ \int_A (p_1x_3\delta\theta + p_1f\delta g + p_3\delta u_3) dA \right\} \Big|_{x_1=0,l} \end{aligned}$$

## 断面積分

$$K_b := \int_A E(x_3)^2 dA$$

$$K_s := \int_A G dA$$

$$R_1 := \int_A E x_3 f dA$$

$$R_2 := \int_A E f^2 dA$$

$$R_3 := \int_A G \{ (f_{,2})^2 + (f_{,3})^2 \} dA$$

$$R_4 := \int_A G f_{,3} dA$$

$$L_1 := \int_A \rho x_3 f dA$$

$$L_2 := \int_A \rho f^2 dA$$

$$M_r := \int_A \rho (x_3)^2 dA$$

$$M_t := \int_A \rho dA$$

$$\bar{M} := \int_A x_3 p_1 dA$$

$$\bar{D} := \int_A p_1 f dA$$

$$\bar{Q} := \int_A p_3 dA$$

## 弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} & \int_L \left\{ (K_b \theta' + R_1 g') (\delta \tilde{\gamma}' - \delta u_3'') + (R_1 \theta' + R_2 g') \delta g' \right. \\ & \quad + (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g) \delta \tilde{\gamma} + (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g) \delta g \\ & \quad \left. + (M_r \ddot{\theta} + L_1 \ddot{g}) (\delta \tilde{\gamma} - \delta u_3') + (L_1 \ddot{\theta} + L_2 \ddot{g}) \delta g + M_t \ddot{u}_3 \delta u_3 \right\} dx_1 \\ & = \int_L q \delta u_3 dx_1 + \left\{ \bar{M} (\delta \tilde{\gamma} - \delta u_3') + \bar{D} \delta g + \bar{Q} \delta u_3 \right\} \Big|_{x_1=0,l} \end{aligned}$$

## 強形式の支配方程式

均質断面の場合

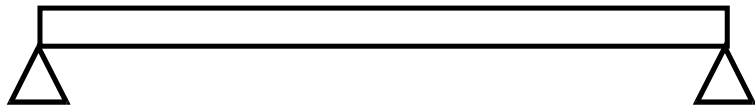
$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \boxed{-K_b \theta'''} - \underline{R_1 g'''} + \boxed{M_r \ddot{\theta}'} + \underline{L_1 \dot{g}'} + \boxed{M_t \ddot{u}_3} - q = 0 \\
 \textcircled{2} \quad & \boxed{-K_b \theta''} - \underline{R_1 g''} + \boxed{K_s \tilde{\gamma}} + \underline{R_4 g} + \boxed{M_r \ddot{\theta}} + \underline{L_1 \ddot{g}} = 0 \\
 \textcircled{3} \quad & \underline{-R_1 \theta'' - R_2 g'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g + L_1 \ddot{\theta} + L_2 \ddot{g}} = 0
 \end{aligned}$$

$K_b$	$EI$
$K_s$	$G\kappa A$
$M_r$	$\rho I$
$M_t$	$\rho A$

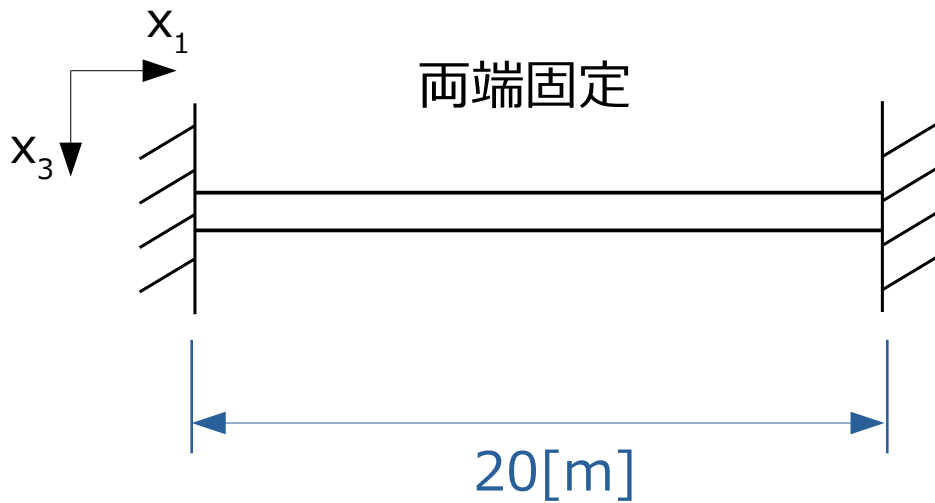
	Euler-Bernoulli ①	Rayleigh ①	Timoshenko ①+②	本提案 ①+②+③
$K_b, M_t$	✓	✓	✓	✓
$M_r$		✓	✓	✓
$K_s$			✓	✓
$\underline{R_i, L_i}$				✓

## 支持条件

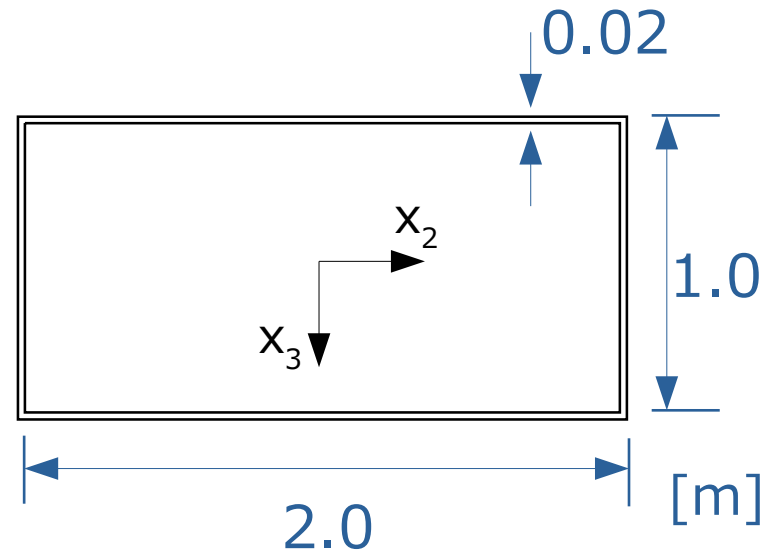
### 単純支持



### 両端固定



## 断面



$E : 200 \text{ GPa}$

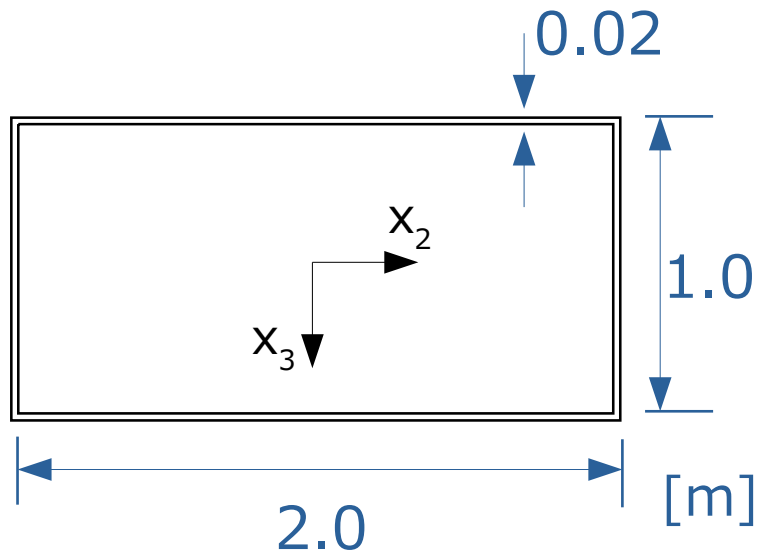
$\nu : 0$

$\rho : 1000 \text{ kg/m}^3$

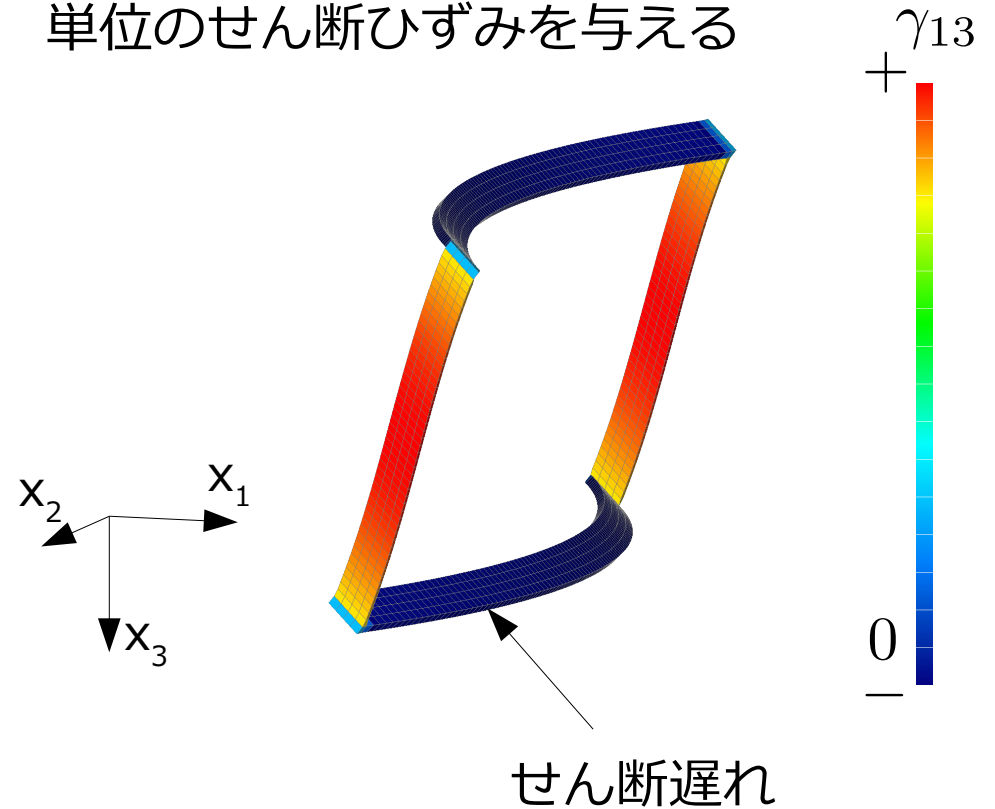
自由振動の固有値解析を行う



## 代表体積要素の変形



単位のせん断ひずみを与える



	節点自由度	要素自由度
Timoshenko	$u_3$ $\theta$	$\tilde{\gamma}$
本提案	$u_3$ $\theta$ $g$	$\tilde{\gamma}$

連続体要素で作成した  
参照解(solidモデル)と比較

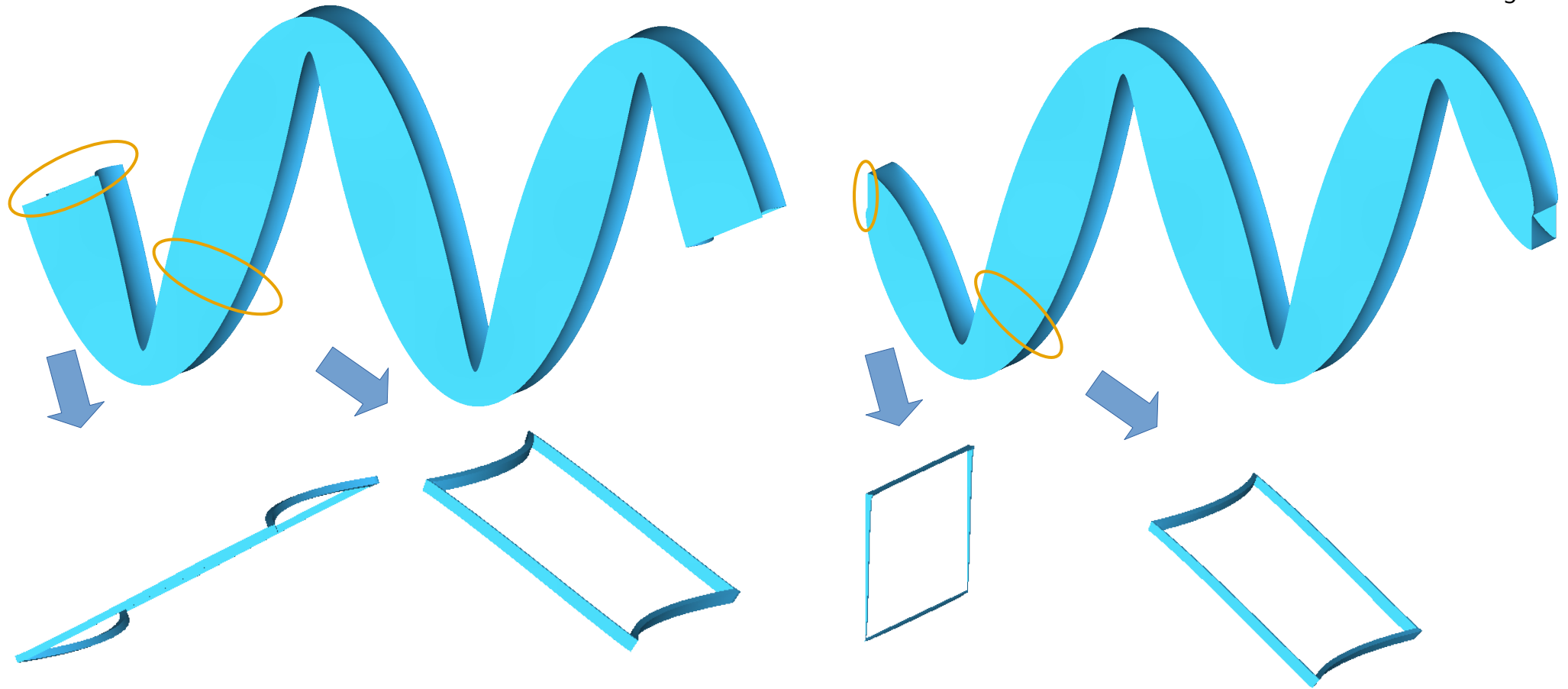
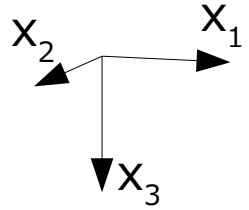
断面変形の大きさ 横せん断ひずみ

## 参照解の変形

単純支持

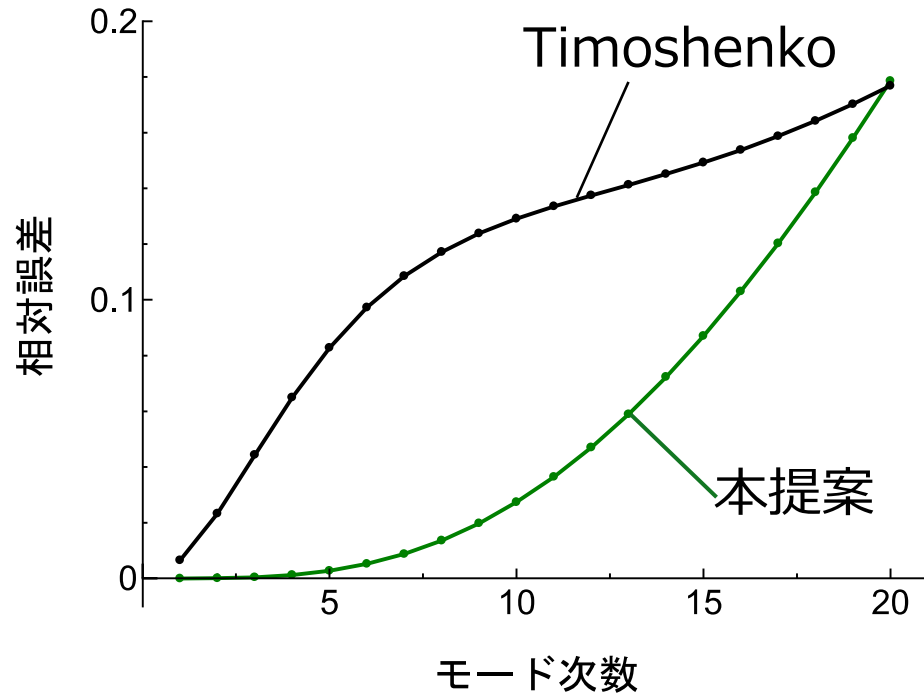
4次モード

両端固定

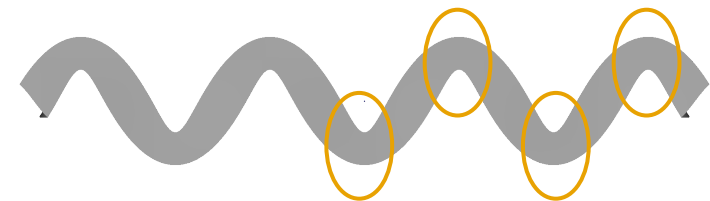
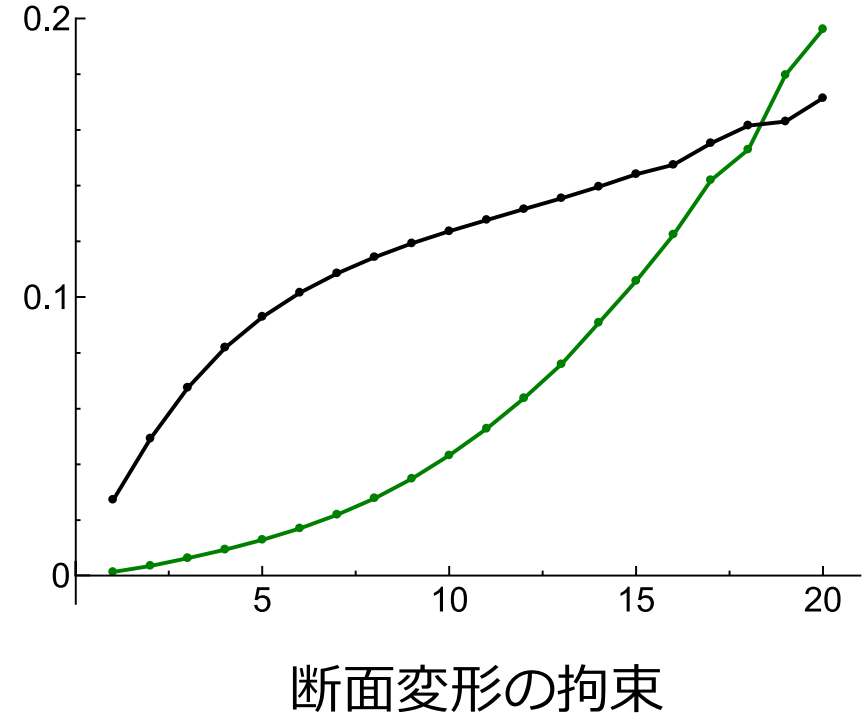


## 固有振動数の比較

単純支持

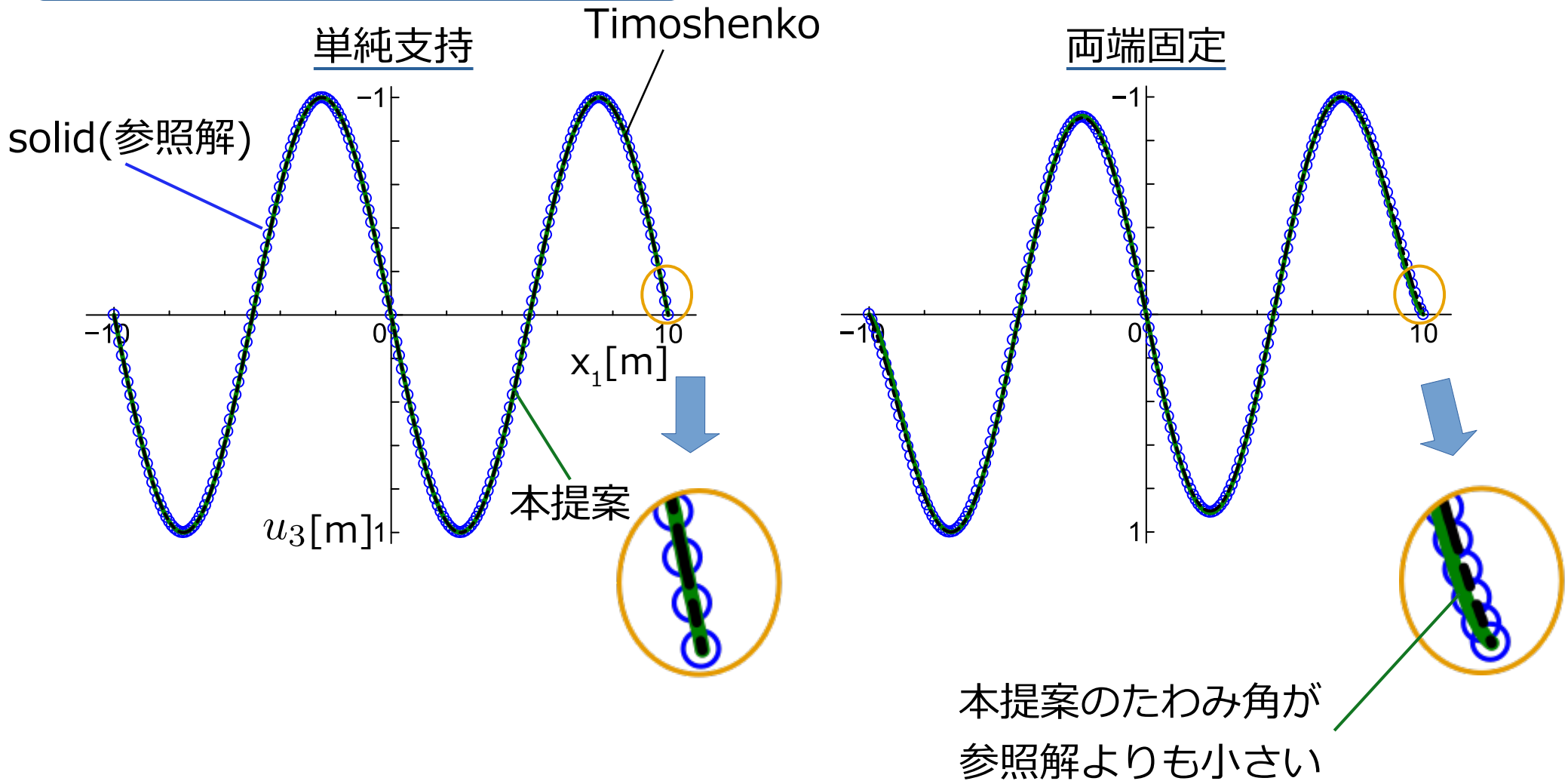


両端固定



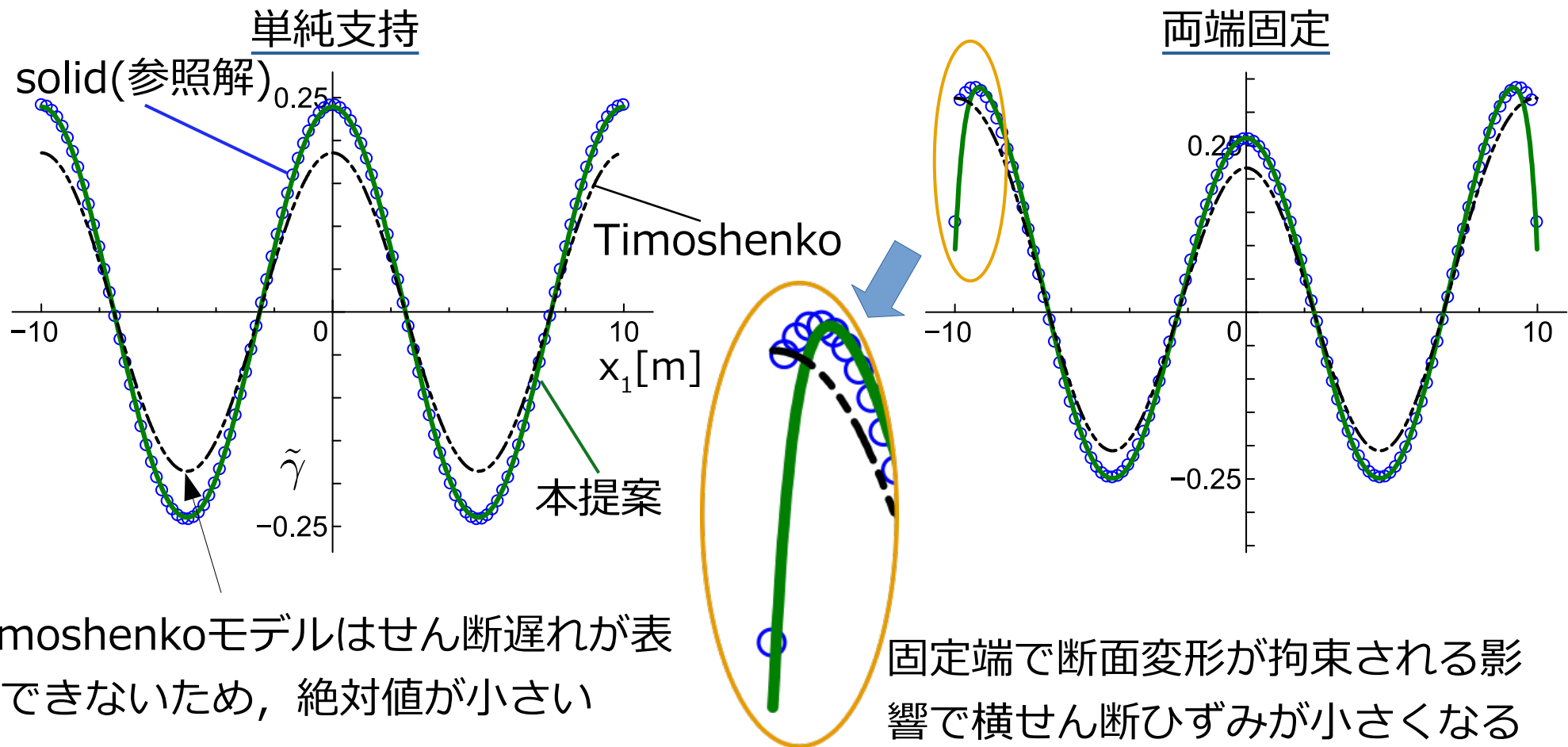
- 10次モード以下ではせん断遅れの影響が大きい
- 高次モードになると, Timoshenkoモデルのせん断剛性が小さく評価される

## 固有モードの比較 (たわみ)



両端固定では、固定端付近で本提案が参照解よりも硬くなった

## 固有モードの比較 (横せん断ひずみ)

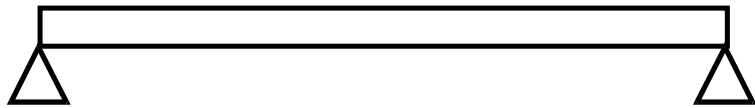


Timoshenkoモデルはせん断遅れが表現できないため、絶対値が小さい

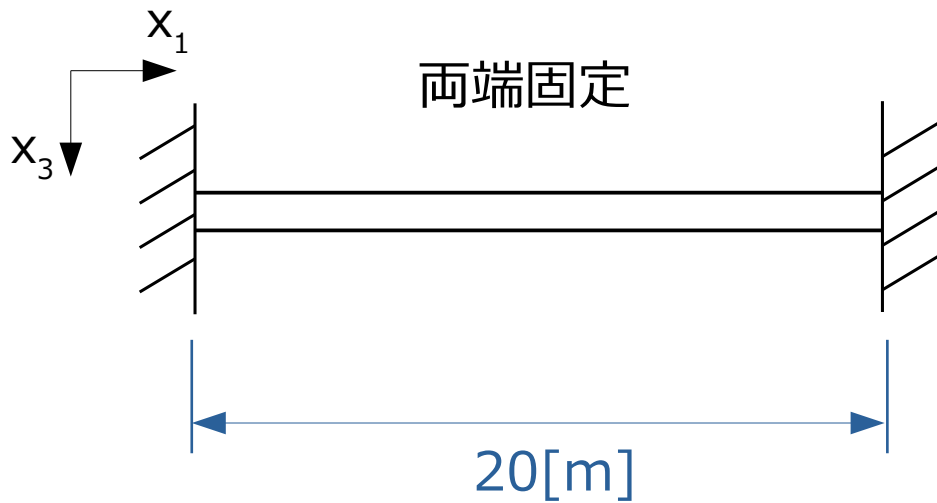
- Timoshenkoモデルは参照解と比較して横せん断ひずみの絶対値が小さい
- Timoshenkoモデルは固定端で断面変形を拘束することができない

## 支持条件

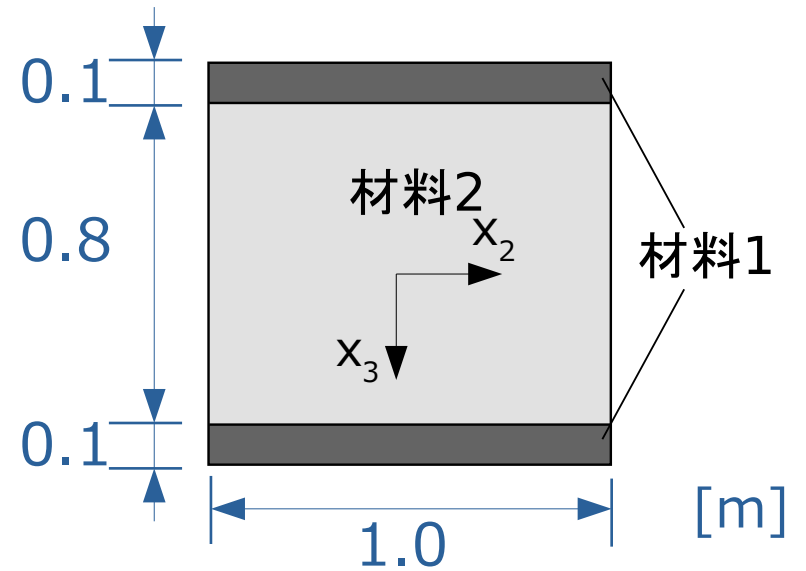
単純支持



両端固定



## 断面



材料1

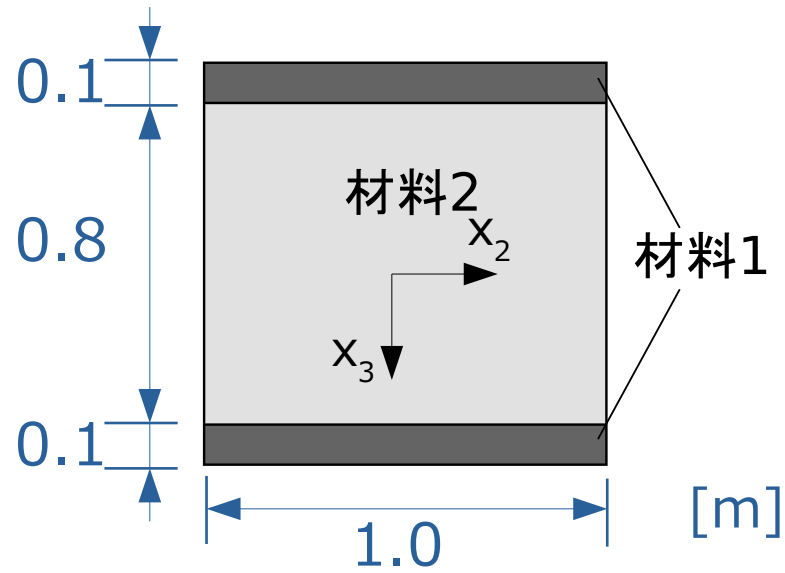
$E : 200 \text{ GPa}$   
 $\nu : 0$   
 $\rho : 1000 \text{ kg/m}^3$

材料2

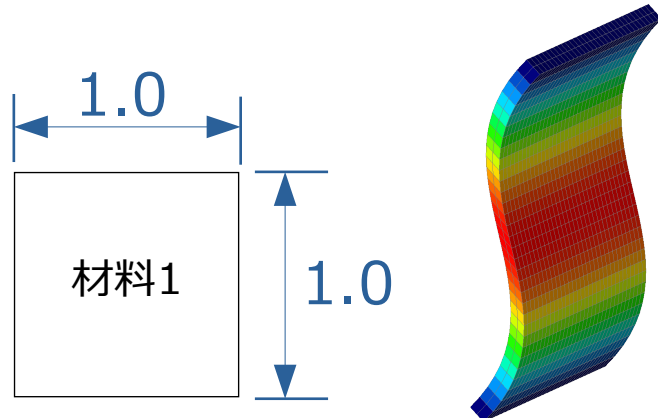
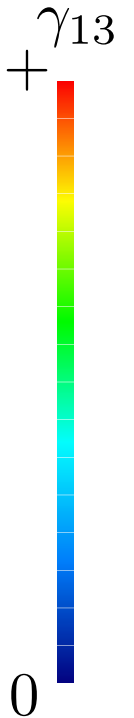
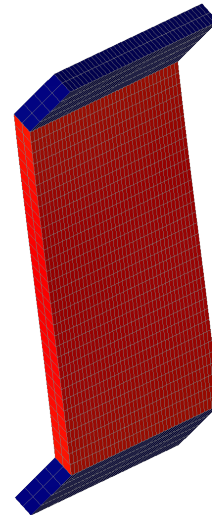
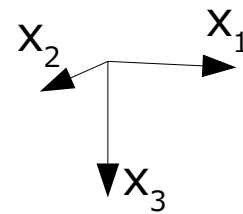
$E : 2 \text{ GPa}$   
 $\nu : 0$   
 $\rho : 1 \text{ kg/m}^3$

自由振動の固有値解析を行う

## 代表体積要素の変形



単位のせん断ひずみを与える



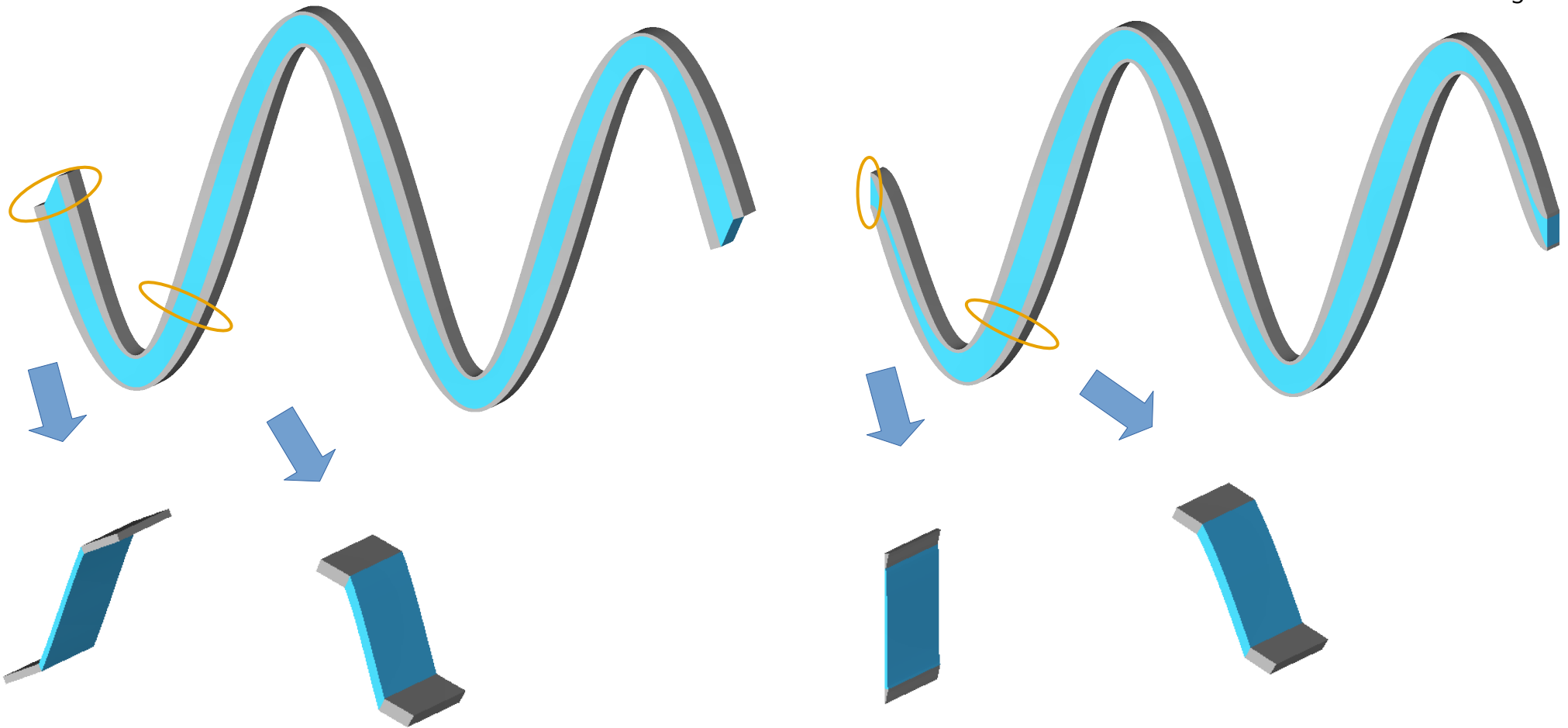
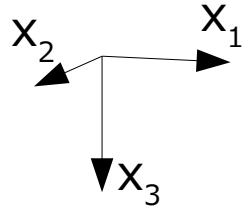
均質矩形断面の変形

## 参照解の変形

単純支持

4次モード

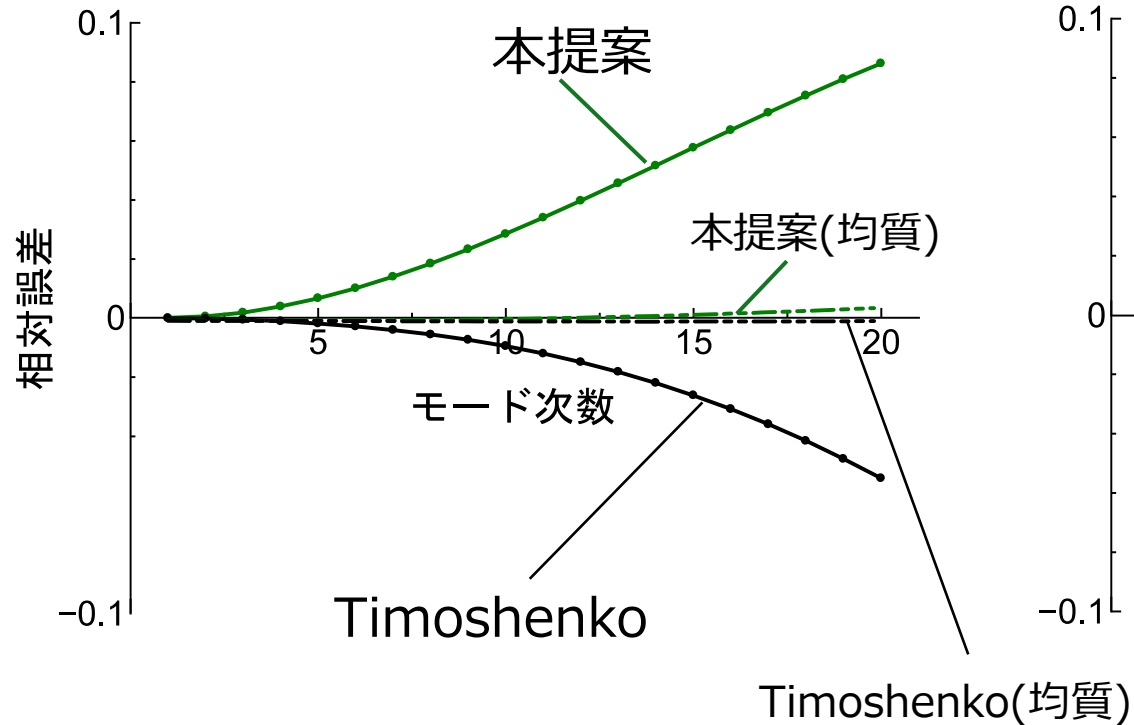
両端固定



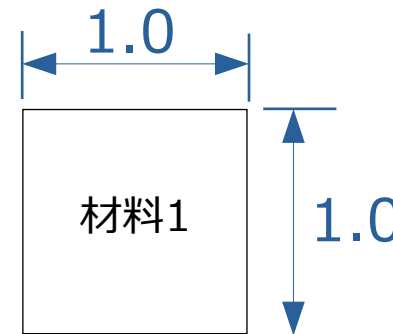
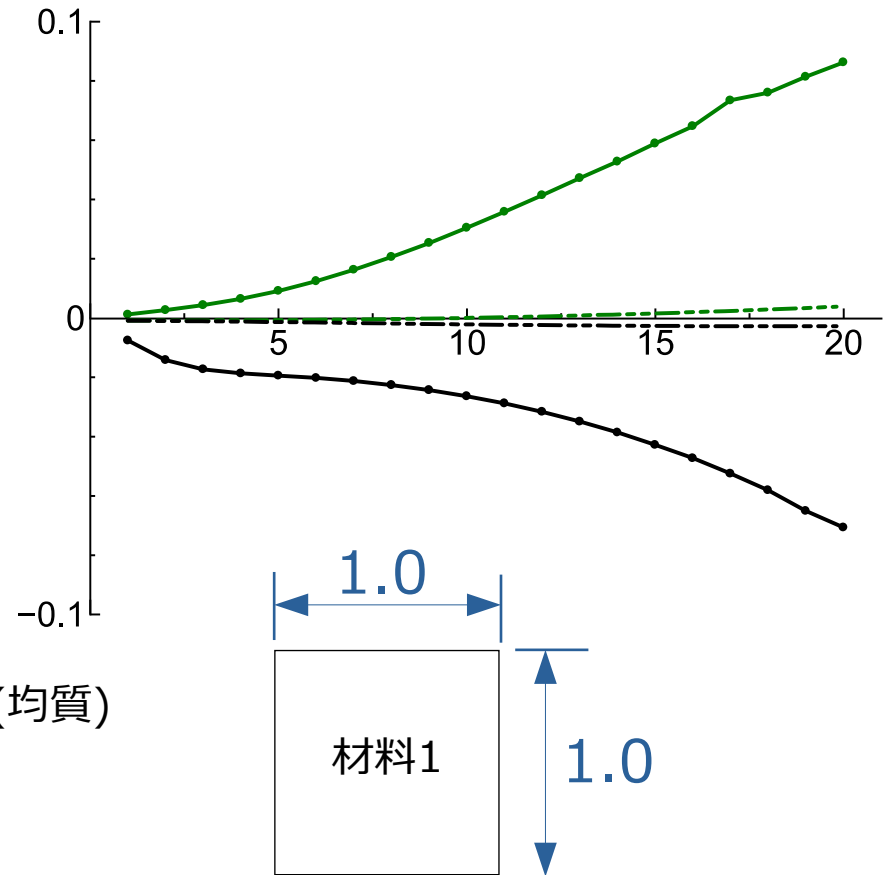


## 固有振動数の比較

### 単純支持

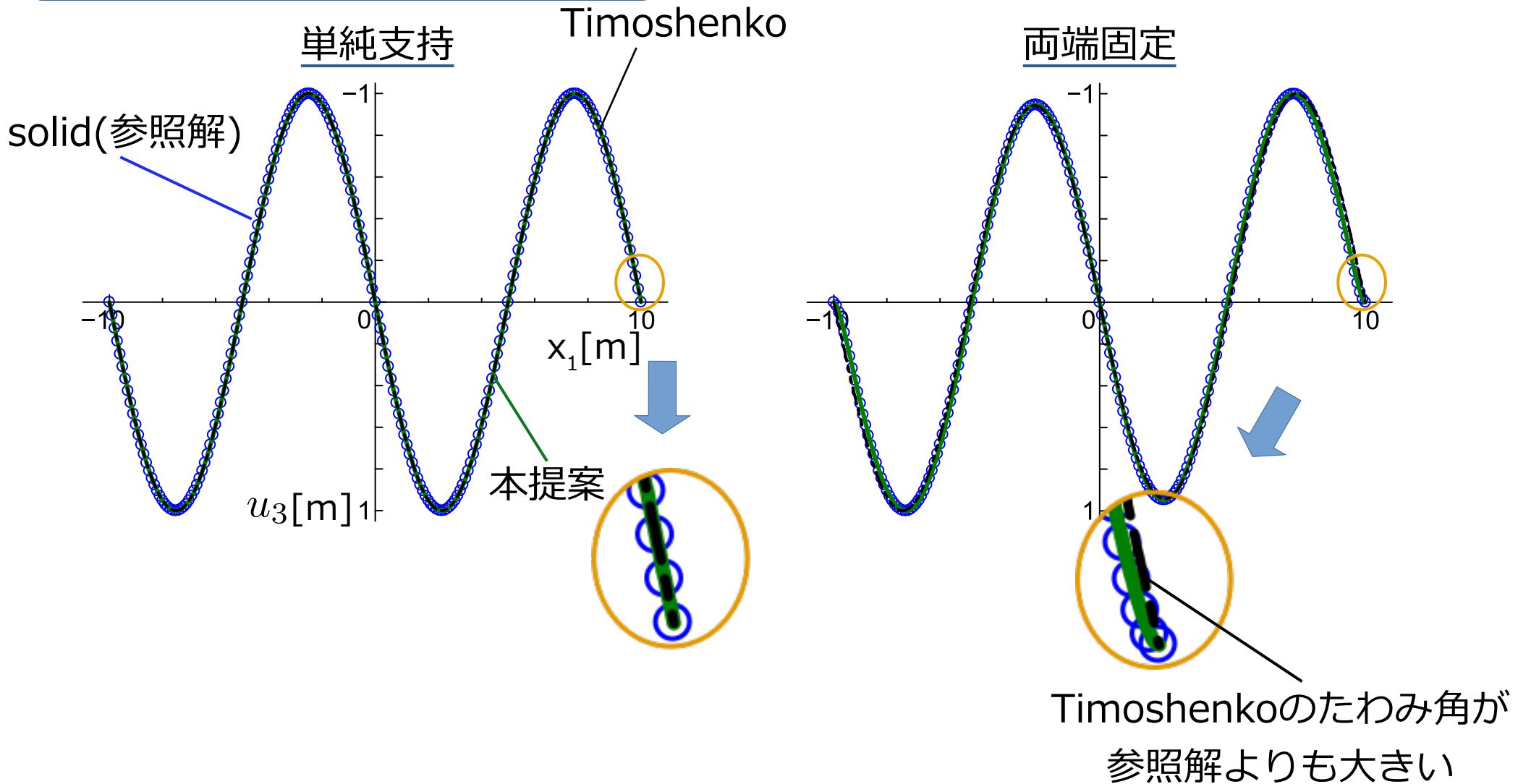


### 両端固定



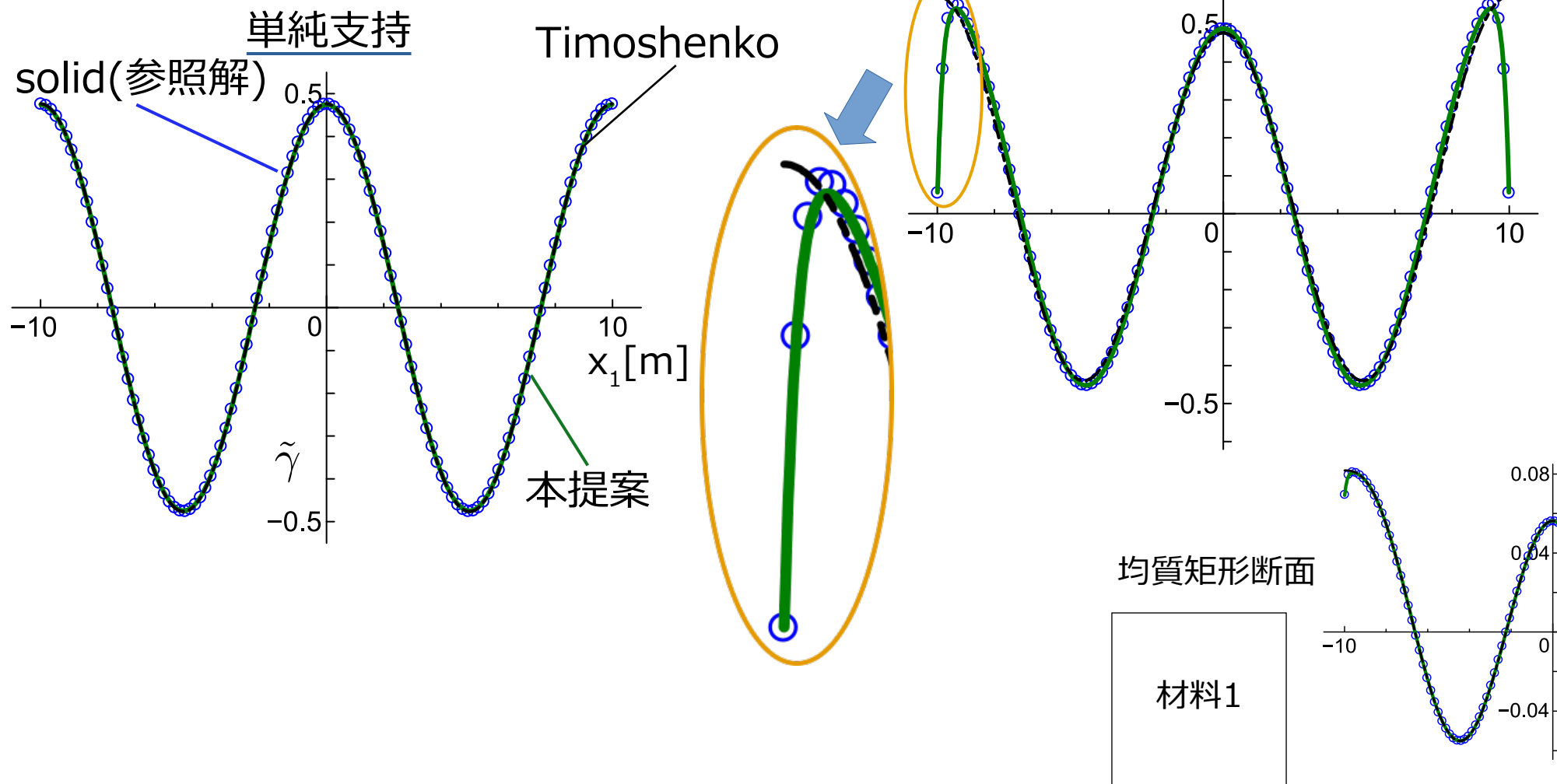
- 同じ寸法の均質矩形断面と比較して、相対誤差が大きい
- 非均質断面では断面変形の影響が大きくなる

## 固有モードの比較 (たわみ)



両端固定では、固定端付近でTimoshenkoの断面変形を拘束できない影響が出る

## 固有モードの比較 (横せん断ひずみ)



- 単純支持では本提案, Timoshenkoモデルともに定性的に一致
- Timoshenkoモデルは固定端で断面変形を拘束することができない

断面変形を考慮した梁要素に動的効果を組み込んだ支配方程式の導出および有限要素定式化を行い、従来の梁要素との比較を行った

- 箱断面では、断面の幅2mに対し、波長4m以上のモードにおいてはせん断遅れに起因する断面変形が振動数に及ぼす影響が大きくなった。このとき、本提案では従来の梁要素と比較して固有振動数の参照解に対する精度を向上することができた。
- モード次数が大きくなると、曲げの波長が短くなり断面の変形が拘束され、せん断剛性が大きくなるため、せん断剛性を一律に決めるTimoshenko梁では、波長が短くなるほど実際よりもせん断剛性が相対的に小さく評価される。
- 両端固定では、固定端では断面の変形が拘束され、Timoshenko梁ではその影響を再現できないが、本提案では再現できた。