せん断に伴う断面変形を考慮した梁理論の一般化に関する検討

A study on generalization of beam theory considering cross-sectional deformation due to shear

鄭 勲*
Kun TEYI

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

The shear correction factor is used to indirectly consider the effect of cross-sectional deformation in the Timoshenko beam. However, the cross-sectional deformation is not necessarily proportional to the shear force. For example, even though the shear force generally becomes discontinuous at intermediate supports in continuous beams, the cross-sectional deformation must be continuous due to compatibility condition of deformation. Therefore, in order to improve the accuracy of the shear behavior of beams, the cross-sectional deformation should be treated independently of the shear force.

In this context, a semi-analytical method that utilizes the shear lag displacement field numerically obtained by the finite element method and the homogenization method has been proposed. Then, this study develops a generalized beam theory that incorporates numerically obtained cross-sectional deformation due to both out-of-plane shear and shear lag.

A beam element based on the developed generalized beam theory is also presented.

Key Words: *shear correction factor, homogenization method, cross-sectional deformation, shear lag*

1. はじめに

梁のせん断変形を表現できる Timoshenko 梁において断面変形の効果を間接的に考慮するためにせん断補正係数が用いられる[1)]．しかし，断面変形を直接的に扱っていないことから，せん断力が不連続となる点では変位場の矛盾により精度が低下することが予想される．

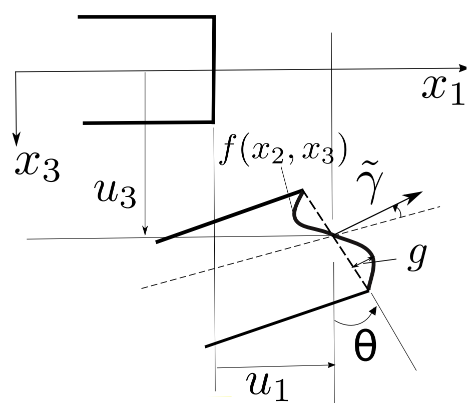
一方，幅広い梁ではフランジにせん断遅れの影響が無視できない．これに対し，均質化法と有限要素解析を用いて任意形状断面のせん断遅れ変位場を数値的に求め，梁理論に導入する半解析的手法が提案されている[2)]．そこで本研究は，面外せん断変形とせん断遅れの両方の変位場を数値的に求め，それらを統一的に梁理論に導入する方法を提案する．

2. 面外せん断とせん断遅れに伴う断面変形を考慮した梁のたわみ

図–1 に示すようなの梁を解析対象とし，面外せん断による橋軸方向の変位を，断面のゆがみモードを表す関数 $f(x_2, x_3)$ とその大きさを表す橋軸方向の関数 $g(x_1)$ とに変数分離し，$f(x_2, x_3)g(x_1)$ と表すこととする．すると，梁における橋軸方向の変位を，断面回転による変位と断面変形によるものの和として考え

$$u_1 = x_3\left(\tilde{\gamma}(x_1) - \frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\right) + f(x_2, x_3)\, g(x_1) \tag{1}$$

と表す．ここで，u_3 は梁の x_3 軸方向のたわみ，$\tilde{\gamma}$ は梁の面外せん断ひずみを表す．



図–1 梁の変位場

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギを

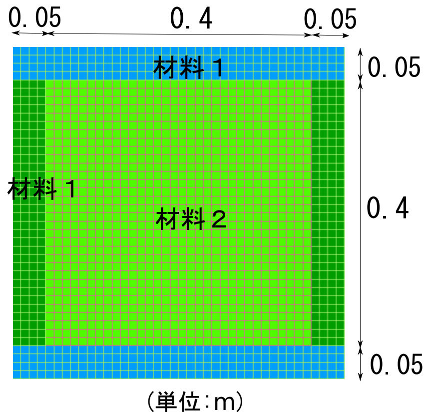
$$\Pi = \Pi_\mathrm{e} - \Pi_\mathrm{ext} \tag{2}$$

とする．ここで，Π_e は梁の曲げ，面内せん断及び面外せん断によるひずみエネルギ，Π_ext は分布荷重の外力ポテンシャルを表している．$\Pi_\mathrm{e}, \Pi_\mathrm{ext}$ はそれぞれ

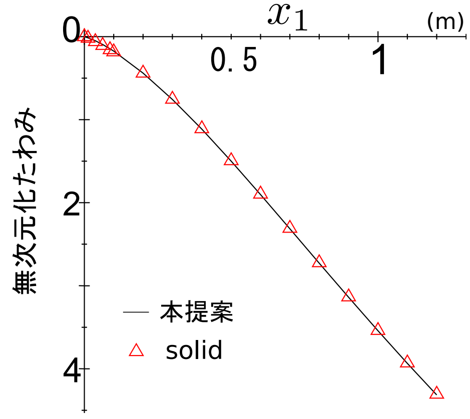
$$\Pi_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_V \left(E\epsilon^2 + G{\gamma_{12}}^2 + G{\gamma_{13}}^2\right)\mathrm{d}V \tag{3}$$

$$\Pi_\mathrm{ext} = \int_L q u_3 \mathrm{d}x_1 \tag{4}$$

とする．ここで，Young 率を E，せん断弾性係数を G，軸ひずみを ϵ，$x_1 - x_2$ 面及び $x_1 - x_3$ 面のせん断ひずみをそれぞれ γ_{12}, γ_{13} とした．



図–2 断面形状



図–3 片持梁のたわみ

最小ポテンシャルエネルギ原理より，全ポテンシャルエネルギは停留する．したがって，$\delta\Pi = 0$ から，u_3 と g と $\tilde{\gamma}$ に関するつり合い式

$$-K_b \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x_1} - R_1 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_1} + M = 0 \tag{5}$$

$$-K_b \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x_1^2} - R_1 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}{x_1}^2} + R_4 g + K_s \tilde{\gamma} = 0 \tag{6}$$

$$-R_1 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x_1^2} - R_2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x_1^2} + R_3 g + R_4 \tilde{\gamma} = 0 \tag{7}$$

を得る．ここで，

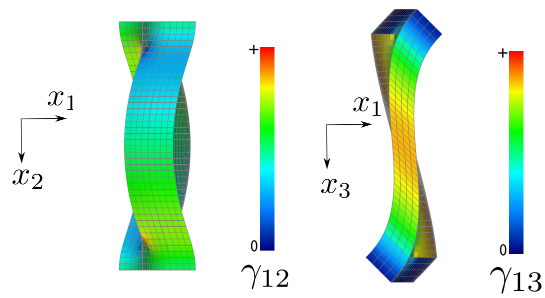
$$\begin{gathered}\theta := \tilde{\gamma} - \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}x_1}\\ R_1 := \int_S E f \mathrm{d}S, \quad R_2 := \int_S E f^2 \mathrm{d}S\\ R_3 := \int_S G \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \mathrm{d}S, \quad R_4 := \int_S G \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_3} \right) \mathrm{d}S\\ K_s := \int_A G \mathrm{d}S, \quad K_b := \int_A E {x_3}^2 \mathrm{d}S\end{gathered} \tag{8}$$

と定義した．

3. 片持ち梁による提案手法の精度検証

図–2 に示す非均質断面の片持ち梁により精度検証を行う．箱断面の上下フランジとウェブが材料 1 であり，箱を充填するコア材を材料 1 と比較して $\frac{1}{10}$ 倍の剛性を有する材料 2 とした．フランジに対してコア材の剛性を小さくして，断面変形がより顕著になることを目論んだ．x_1 の原点を片持ち梁の支点，x_2 の原点を橋軸直角方向の中央，x_3 の原点を高さ方向の中央と設定した．また，梁の長さ $\ell = 1.2$ m とし等分布荷重 $q = 250$ N/mm をウェブに自重として載荷した．

参照解とするために，1 辺 0.0125 m の立方体を 8 節点 6 面体ソリッド要素により分割した有限要素モデルによる解析を行った．フランジ厚は厚さ方向に 2 要素となり，要素総数は 153,600，節点総数は 163,057 である．片持ち支持は，具体的には橋軸方向端部の断面上の節点をすべて完全拘束することでモデル化した．なお，全節点の x_2 方向変位を拘束した．このモデルを以降 solid と呼ぶ．



図–4 体表体積要素のせん断変形図

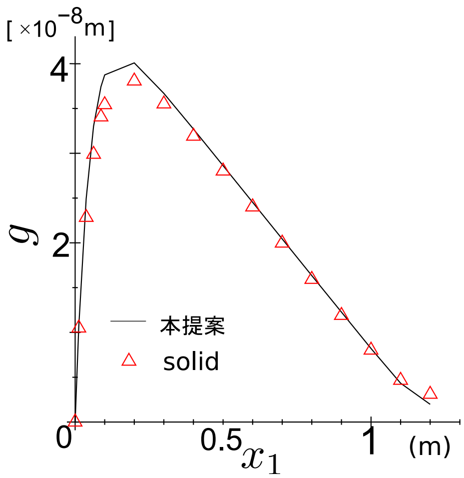
この断面の梁の代表体積要素を作成し，体表体積要素に周期境界条件のもとで一様せん断変形を与えた解析を行った．この時得られた断面の x_1 軸方向変位が面外せん断に伴う断面のゆがみモード $f(x_2, x_3)$ である．体表体積要素のせん断変形図を**図–4** に示す．さらに Gauss 積分を用いて断面のパラメータ $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を数値的に求めた．

本手法および solid による軸方向位置 (x_1) と Euler-Bernoulli 梁による自由端のたわみで無次元化したたわみ u_3 の関係を**図–3** に示した．相対誤差 L^2 ノルムを

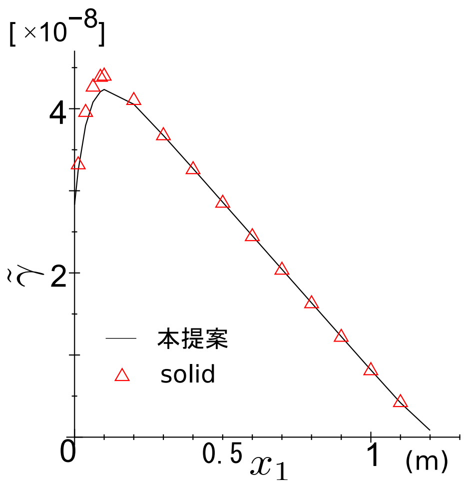
$$\delta = \sqrt{\frac{\int_L (f - f_{\mathrm{ref}})^2 \,\mathrm{d}x_1}{\int_L f_{\mathrm{ref}}^2 \,\mathrm{d}x_1}} \tag{9}$$

と定義すると solid のたわみに対する本手法の L^2 ノルムは 0.23% であった．ここで，f は本手法による解であり f_{ref} は solid の解である．

軸方向位置 (x_1) と断面変形の大きさ g の関係を**図–5** に示した．ここで，solid に対する本手法の L^2 ノルムは 6.8% ある．たわみに比べて精度はよくないが，自由端から支点に向かって大きくなる傾向と，支点で変位が



図–5 片持梁の断面変形の大きさ g



図–6 片持梁の面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$

拘束されていることから支点付近で急激に g がゼロになることを再現できている．本手法では断面変形を考慮しているので，片持ち梁の固定端付近の梁の挙動を正確に再現できた．

軸方向位置 (x_1) と $\tilde{\gamma}$ の関係を図–6 に示した．ここで，solid に対する本手法 γ の L^2 ノルムは 2.9% である．この問題ではせん断力は線形で支点上で最大となるが，断面変形の拘束により $\tilde{\gamma}$ は支点付近で低下する傾向が見られ，本手法はこの傾向をよく再現できている．本手法は solid の面外せん断ひずみの分布を再現できたことで，せん断剛性を高精度に評価できている．

4. 面外せん断とせん断遅れによる断面変形を組み込んだ有限要素の定式化

面外せん断とせん断遅れによる断面変形を有限要素に組み込んだ梁要素を提案する．

一要素あたり 2 節点を持ち，各節点がそれぞれ $(u_1)_i^e$, $(u_3)_i^e$, $(\theta)_i^e$, $(g)_i^e$ の 4 自由度を持つ要素を考える．要素における梁のたわみ (u_3) は 3 次の内挿関数 ψ_i を用いて表す．梁の面外せん断ひずみ $(\tilde{\gamma})^e$ は要素内で一定と考えると

$$\begin{aligned} u_3 &= \psi_1 (u_3)_1^e - \psi_2 \frac{\mathrm{d}(u_3)_1^e}{\mathrm{d}x_1} + \psi_3 (u_3)_2^e - \psi_4 \frac{\mathrm{d}(u_3)_2^e}{\mathrm{d}x_1} \\ &= \psi_1 (u_3)_1^e + \psi_2 (\theta)_1^e + \psi_3 (u_3)_2^e + \psi_4 (\theta)_2^e \\ &\qquad + (-\psi_2 - \psi_4)(\tilde{\gamma})^e \end{aligned} \tag{10}$$

となる．せん断遅れの大きさ g は 1 次の内挿関数 ϕ_i を用いて

$$g = \phi_1(x_1)(g)_1^e + \phi_2(x_1)(g)_2^e \tag{11}$$

と表す．

2 節で式 (5), (6), (7) を導出するための仮想仕事式は梁全体を解析対象としていたが，ここでは要素長 ℓ の 1 有限要素での力のつり合いを考える．つり合い式の弱形式で用いる変数 u_3, θ, g を式 (10), (11) で近似して支配方程式を離散化すると

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \Bigg\{ -q\psi_i (\delta w_i)^e \\ &\quad + \left(K_b \left(w_j\right)^e \frac{\mathrm{d}^2\psi_j}{\mathrm{d}{x_1}^2} - R_1 (g)_j^e \frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}x_1} \right) \frac{\mathrm{d}^2\psi_i}{\mathrm{d}{x_1}^2} (\delta w_i)^e \Bigg\} \mathrm{d}x_1 \\ &\quad - V_1 (\delta w_1)^e - V_2 (\delta w_3)^e - M_1 (\delta w_2)^e - M_2 (\delta w_4)^e = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \Bigg\{ \left(K_s (w_5)^e + R_4 (g)_j^e \phi_j \right) (\delta w_5)^e \\ &\quad + \left(R_1 (g)_j^e \frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}x_1} - K_b \left(w_j\right)^e \frac{\mathrm{d}^2\psi_j}{\mathrm{d}{x_1}^2} \right) (\delta w_5)^e \Bigg\} \mathrm{d}x_1 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \Bigg\{ \left(R_3 (g)_j^e \phi_j + R_4 (w_5)^e \right) \phi_i (\delta g)_i^e \\ &\quad + \left(-R_1 \left(w_j\right)^e \frac{\mathrm{d}^2\psi_j}{\mathrm{d}{x_1}^2} + R_2 \, (g)_j^e \frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}x_1} \right) \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x_1} (\delta g)_i^e \Bigg\} \mathrm{d}x_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここで，V_i, M_i はそれぞれ節点 i に作用する鉛直方向に外力とモーメント外力であり，

$$(\boldsymbol{w})^e = \left\{ (u_3)_1^e \quad (\theta)_1^e \quad (u_3)_2^e \quad (\theta)_2^e \quad (\tilde{\gamma})^e \right\}^T$$

$$\psi_5 = -\psi_2 - \psi_4$$

である．式 (12), (13), (14) より，要素剛性方程式

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{15}$$

を得る．ここで，要素剛性行列 $\boldsymbol{k}$，節点変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{k}_2 \\ \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{k}_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u} = \left\{ (u_3)_1^e \quad (\theta)_1^e \quad (g)_1^e \quad (u_3)_2^e \quad (\theta)_2^e \quad (g)_2^e \right\}^T \tag{17}$$

であり，f は節点力ベクトルである．要素剛性行列の各

成分は

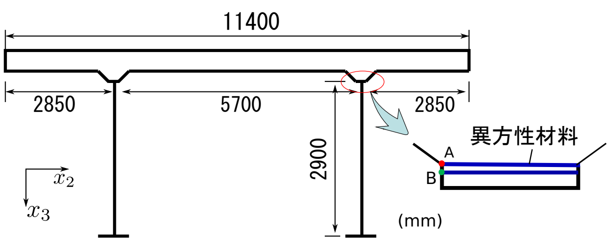
$$
\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & -\frac{3R_4}{\ell\alpha K_s} \\ & \frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{3K_b}{\ell^2 K_s}\right) & \frac{R_1}{\ell}+\frac{3R_4}{2K_s\alpha} \\ \text{Symm.} & & \frac{R_2}{\ell}+\frac{R_3\ell}{3}-\frac{(R_4)^2\ell^4}{8K_bK_s\alpha} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & -\frac{3R_4}{\ell\alpha K_s} \\ \frac{3}{\ell\alpha} & \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{6K_b}{\ell^2 K_s}\right) & -\frac{R_1}{\ell}+\frac{3R_4}{2K_s\alpha} \\ -\frac{3R_4}{\ell\alpha K_s} & -\frac{R_1}{\ell}+\frac{3R_4}{2K_s\alpha} & -\frac{R_2}{\ell}+\frac{R_3\ell}{6}-\frac{(R_4)^2\ell^4}{8K_bK_s\alpha} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2\alpha} & \frac{3}{\ell\alpha} & \frac{3R_4}{\ell\alpha K_s} \\ & \frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{3K_b}{\ell^2 K_s}\right) & \frac{R_1}{\ell}+\frac{3R_4}{2K_s\alpha} \\ \text{Symm.} & & \frac{R_2}{\ell}+\frac{R_3\ell}{3}-\frac{(R_4)^2\ell^4}{8K_bK_s\alpha} \end{bmatrix}
$$

$$
\alpha = \frac{\ell}{2K_b} + \frac{6}{\ell K_s}
$$

である．



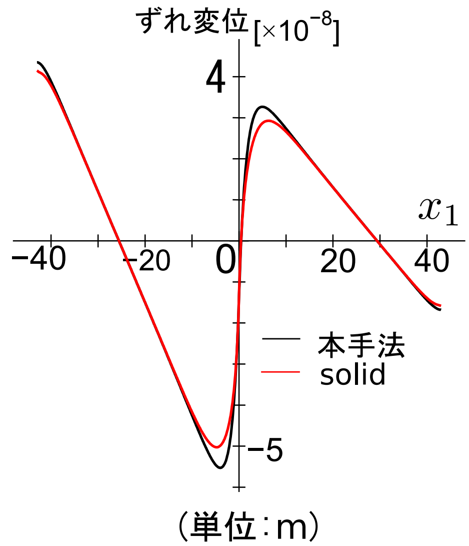
図–7 合成桁橋の断面図

5. 連続合成桁による精度検証

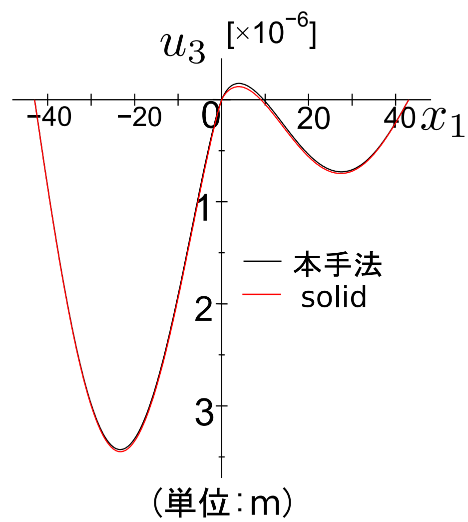
解析対象モデルは二径間・二主桁の鋼・コンクリート合成桁橋とし，コンクリート床版と鋼桁のずれ変位に伴う断面変形をしやすくするために，床版と桁の間にせん断剛性 (G_{13}) が小さい異方性材料を設定する．桁断面図を**図–7** に示す．支間長は 43 m+43 m である．第一径間に $2q_0$，第二径間に q_0 の等分布荷重をウェブに載荷する．

比較のためにソリッド要素を用いた有限要素解析も行った．849,680 の 8 節点 6 面体アイソパラメトリック要素，1,093,470 節点からなる有限要素モデルを作成し，両端支点と中間支点に相当する位置にある断面上の節点の鉛直方向に変位を拘束した．

本手法と solid による軸方向位置 (x_1) とたわみ u_3 の関係を**図–8** に示した．この図から，離散化手法のたわみ u_3 は solid のたわみに近いことがわかり， solid のたわみに対する離散化手法の L^2 ノルムは 1.25% である．有限要素離散化手法と solid による軸方向位置 (x_1) と床版と鋼桁のずれ変位の関係を**図–9** に示した．ずれ変位は**図–7** に示した二つの点を A，B の橋軸方向の相対変位から，ずれ変位 $=u_1^B - u_1^A$ のように定義した． solid のずれ変位に対する離散化手法の L^2 ノルムは 7.13% で



図–8 合成桁橋の床版と鋼桁の間のずれの軸方向 x_1 分布



図–9 合成桁橋のたわみ u_3 の軸方向 x_1 分布

ある．この図から，たわみ u_3 に比べて精度はよくないが， solid の支点で変位が拘束されていることから支点付近で連続的に負から正へ変化することを再現できている．

参考文献

1) Cowper, G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.33, pp.335-340, 1966.
2) 斉木　功，西井大樹，岩熊哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化，土木学会論文集 A2， Vol.72， No.2, pp.I_53–I_62, 2016.

(2019 年 2 月 1 日 提出)