

# 均質化梁理論によりせん断遅れを考慮した 一般化梁の定式化とその有限要素の開発

Generalized Beam Element for Shear Lag Analysis based on Homogenized Beam Theory

西井大樹\*  
Daiki NISHII

\*構造強度学研究室（指導教員：斉木 功 准教授）

Bending strain distribution on wide flanges does not become uniform because of the shear lag. An analytical approach with assumptions of the shear lag displacement on simple cross section was proposed. Authors have proposed semi-analytical approach to solve the shear lag problem with the help of the homogenized beam theory. In present study, we try to exploit the numerical result in order to improve accuracy of the semi-analytical approach. In addition, we propose a beam element considering shear lag effect. Consequently, an accurate shear lag analysis applicable to arbitrary frame structure has been established.

**Key Words:** *periodic boundary condition, shear lag, homogenization method, finite element analysis*

## 1. はじめに

幅広フランジではウェブから離れると曲げ応力が小さくなるため、橋梁の設計の際にはフランジの有効幅を考慮して初等梁理論を用いるのが一般的である。断面形状が単純ならば橋軸方向変位分布を仮定してせん断遅れを解析的に評価できるが、複雑な断面形状における橋軸方向変位分布は解析的に求められない。

一方で、周期境界条件を用いた均質化梁理論<sup>1)</sup>により、梁の代表体積要素に曲げモーメントとせん断力を独立に作用させる自由度の高い数値要素試験が可能になった。筆者らの過去の研究<sup>2)</sup>においては均質化梁理論によって数値的に求めた変位分布を解析的手法<sup>3)</sup>に組み込んだ半解析的手法を提案した。本研究ではこの半解析的手法の精度改善を目的として、橋軸方向変位の断面内分布を考慮する方法を提案する。

また、有限要素解析にせん断遅れ解析を組み込む研究も報告されている。Zhou<sup>4)</sup>は断面形状や境界条件を限定する有限要素せん断遅れ解析を行っている。本研究では任意断面の梁に適用可能なせん断遅れ解析を組み込んだ梁要素を開発する。

## 2. せん断遅れの半解析手法

図-1 に示すような任意形状断面の梁を解析対象とし、橋軸方向を  $x_1$ 、橋軸直角水平方向を  $x_2$ 、鉛直方向を  $x_3$  とする正規直交座標系を設定する。解析対象領域  $V$  を、フランジ等のせん断遅れを考慮する領域  $V_F := S_F \times L$  とそれ以外のウェブ等の領域  $V_W := S_W \times L$  に区別する。ここで、 $L$  は橋軸方向の解析対象領域であり、 $-\frac{l}{2} \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$  とする。

せん断遅れによる橋軸方向の変位を、断面内の分布形状を表す関数  $f(x_2, x_3)$  とその大きさを表す橋軸方向の関数  $g(x_1)$  とに変数分離し、 $f(x_2, x_3)g(x_1)$  と表すこととする。すると、 $V_F$  における橋軸方向の変位  $u_1$  は曲げによる変位とせん断遅れによる変位の和として

$$u_1 = x_3 \left( \tilde{\gamma} - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + f(x_2, x_3)g(x_1) \quad (1)$$

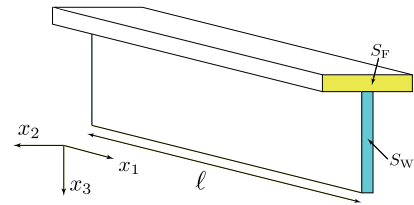


図-1 解析対象の梁とその断面

と表すことができる。ここで、 $u_3$  は梁のたわみ、 $\tilde{\gamma}$  は梁の面外せん断ひずみを表す。なお、Reissner や著者の卒業研究では  $f$  を  $x_2$  のみの関数としている。これに対して、本解析では  $f$  を  $x_2$  および  $x_3$  の関数として定義している。また、卒業研究においては梁の面外せん断ひずみを無視していたが、本研究ではこれについても考慮した。周期境界条件のもとで梁の代表体積要素にせん断変形を与えた有限要素解析を行い、算出された各要素の面外せん断ひずみを積分することで数値的に  $f$  を求める。

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  を

$$\Pi := \Pi_F + \Pi_W + \Pi_Q - \Pi_{\text{ext}} \quad (2)$$

と表す。ここに、 $\Pi_F$  は  $V_F$  のひずみエネルギー

$$\Pi_F := \frac{1}{2} \int_{V_F} (E\epsilon_1^2 + G\gamma_{12}^2) dV \quad (3)$$

$\Pi_W$  は  $V_W$  のひずみエネルギー

$$\Pi_W := \frac{1}{2} (EI)_W \int_L \left( \frac{d\tilde{\gamma}}{dx_1} - \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (4)$$

$\Pi_Q$  は梁の面外せん断ひずみエネルギー

$$\Pi_Q := \frac{1}{2} \int_L GK_A \tilde{\gamma}^2 dx_1 \quad (5)$$

$\Pi_{\text{ext}}$  は分布荷重の外力ポテンシャル

$$\Pi_{\text{ext}} := \int_L qu_3 dx_1 \quad (6)$$

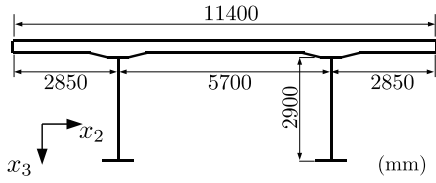


図-2 合成桁橋全体断面図

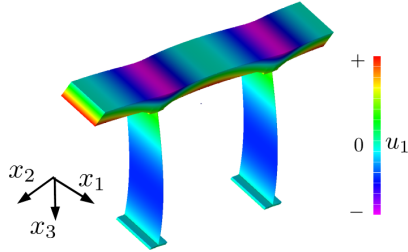


図-3 合成桁橋の代表体積要素のせん断変形

である。ここで、Young 率を  $E$ 、せん断弾性係数を  $G$ 、 $S_w$  の曲げ剛性を  $(EI)_w$ 、単位長さあたりの鉛直外力を  $q(x_1)$ 、軸ひずみを  $\epsilon$ 、 $x_1$ - $x_2$  面内せん断ひずみを  $\gamma$  とした。

以上を用いてフランジが面内せん断変形する梁理論を定式化すると、曲げモーメントを  $M$  としたとき、式(2)の汎関数の停留条件から、 $u_3$  と  $g$  と  $\tilde{\gamma}$  に関する微分方程式

$$-(EI) \left( \frac{d^3 \tilde{\gamma}}{dx_1^3} - \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} \right) - R_1 \frac{d^3 g}{dx_1^3} - q = 0 \quad (7)$$

$$GKA \tilde{\gamma} - (EI) \left( \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{dx_1^2} - \frac{d^3 u_3}{dx_1^3} \right) - R_1 \frac{d^2 g}{dx_1^2} = 0 \quad (8)$$

$$-R_1 \left( \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{dx_1^2} - \frac{d^3 u_3}{dx_1^3} \right) - R_2 \frac{d^2 g}{dx_1^2} + R_3 g = 0 \quad (9)$$

を得る。ここで、 $(EI)$  は全断面の曲げ剛性であり、

$$R_1 := \int_{S_F} E x_3 f \, dS, \quad R_2 := \int_{S_F} E f^2 \, dS$$

$$R_3 := \int_{S_F} G \left( \frac{df}{dx_2} \right)^2 \, dS$$

と定義した。

### 3. 鋼コンクリート合成桁による結果の検証

非均質な任意断面の梁の例として、鋼コンクリート合成桁のせん断遅れの解析を行った。解析対象モデルの断面図を図-2に示す。床版はコンクリート、桁は鋼の標準的な材料定数を設定した。支間長を 30 m として、橋梁全体に 100 kN/m の鉛直等分布荷重が作用するものとした。本解析例のような橋梁では、桁間のせん断遅れに起因する橋軸方向変位の橋軸直角方向分布をほぼ放物線とみなし、構造形式ごとの各設計基準では Reissner の結果を準用して有効幅を決定している。

有限要素法による解析を参照解とするために、要素数 132,750、節点数 174,648 からなる有限要素モデルを作成した。荷重はウェブの中立面上の要素に面荷重として

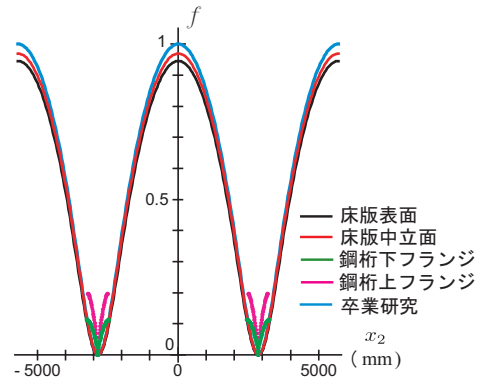


図-4 合成桁橋のせん断遅れによる変位分布  $f$

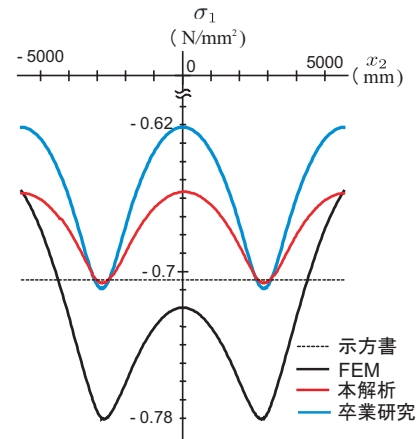


図-5 合成桁橋の床版表面曲げ応力 ( $x_1 = -10$  m)

与えた。この有限要素モデルから橋軸方向長さ 0.8 m 切り出したモデルを代表体積要素とした。領域  $V_F$  における橋軸方向変位の分布  $f$  を得るために、代表体積要素に周期境界条件のもとで  $x_3$ - $x_1$  面せん断ひずみ  $\gamma_{31} = 1.0$  を与え解析を行った。このときの変形図と橋軸方向変位分布を図-3に示す。なお、せん断遅れの影響を考慮する領域  $V_F$  はコンクリート床版と鋼桁の上下フランジとし、 $V_F$  における橋軸方向節点変位を数値的に求めて正規化して  $f(x_2, x_3)$  とした。さらに Gauss 積分を用いて  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を数値的に求めた。

筆者の卒業研究においては床版のみを  $V_F$  とし、その中でのせん断遅れの鉛直方向分布は考慮せずに床版図心位置での橋軸方向節点変位のみを求めて正規化した  $f(x_2)$  が鉛直方向には一定に分布するものとした。また、 $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を求める際に Gauss 積分は用いずに線形補完による台形積分で求めた。本解析における床版表面と中立面、上下フランジにおける  $f(x_2, x_3)$  と卒業研究における  $f(x_2)$  を図-4に示す。 $f$  はウェブ上で 0 であり、ウェブから離れると大きくなって床版中央部と端部において最大となっている。また、本解析において床版の表面よりも中立面のほうが  $f$  は大きく、梁としての中立軸に近くなるにつれてせん断遅れの影響が大きくなることがわかる。

$x_1 = -10$  m の断面での床版表面における曲げ応力の

橋軸直角方向分布を図-5に示す。図中、示方書は片側有効幅を2,766 mmとしたときのTimoshenko梁理論による解析解である。最大応力のFEMに対する相対差は本解析で-9.51%、卒業研究で-9.13%、示方書で-9.73%となっている。示方書では応力の橋軸直角方向分布を考慮していないために橋軸直角方向には一定となっているのに対し、卒業研究や本解析ではせん断遅れによる曲げ応力の橋軸直角方向分布をある程度再現できている。また、最大応力に関しても示方書よりも本解析や卒業研究の方が高精度に求められている。本解析と卒業研究を比較すると、最大応力に関しては卒業研究の方が本解析よりもわずかにFEMに近い値となっているが、分布形状に関しては本解析の方がFEMの分布形状に近い形となっている。曲げ応力のFEMとの差を橋軸直角方向に積分した単位長さ当たりの $L^2$ ノルムは本解析で8.72%、卒業研究で10.1%となっている。以上より、示方書の手法よりも本解析や卒業研究の方が精度よく最大応力を求められており、卒業研究よりも本解析の方が応力の分布形状をうまく再現できていることが分かる。

#### 4. せん断遅れを組み込んだ有限要素の定式化

2節で提案した手法では単純支持で等分布载荷の梁であったため解析的にたわみを求めることができたが、ラーメン構造等では解析的に変位を求めることができない。そこで、ここではせん断遅れ解析を有限要素法に組み込むことで任意形状においてせん断遅れの影響を考慮した解析手法を提案する。

各節点がそれぞれ $(u_1)_i^e$ ,  $(u_3)_i^e$ ,  $(\theta)_i^e$ ,  $(g)_i^e$ の4自由度を持つこととし、2節の手法を有限要素法により離散化する。ここで、 $\theta$ は梁のせん断変形を考慮した断面の回転角であり、

$$\theta := -\frac{du_3}{dx_1} + \tilde{\gamma}$$

と定義した。各要素における梁のたわみ $(u_3)$ は3次の内挿関数 $\psi_i$ を用いて表す。梁の面外せん断ひずみ $(\tilde{\gamma})^e$ は要素内で一定と考えると

$$\begin{aligned} u_3 &= \psi_1 (u_3)_1^e - \psi_2 \frac{d(u_3)_1^e}{dx_1} + \psi_3 (u_3)_2^e - \psi_4 \frac{d(u_3)_2^e}{dx_1} \\ &= \psi_1 (u_3)_1^e + \psi_2 (\theta)_1^e + \psi_3 (u_3)_2^e + \psi_4 (\theta)_2^e \\ &\quad + (-\psi_2 - \psi_4) (\tilde{\gamma})^e \end{aligned} \quad (10)$$

となる。せん断遅れの大きさ $g$ は1次の内挿関数 $\phi_i$ を用いて

$$g = \phi_1 (g)_1^e + \phi_2 (g)_2^e \quad (11)$$

と表す。

2節で式(7), (9), (8)を導出するための仮想仕事式は梁全体を解析対象としていたが、ここでは要素長 $\ell$ の1有限要素での力のつり合いを考える。つり合い式の弱形式で用いる変数 $u_3, \theta, g$ を式(10), (11)で近似して支配方程式を離散化すると

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left\{ -q\psi_i (\delta w_i)^e + EI (w_j)^e \frac{d^2\psi_j}{dx_1^2} \frac{d^2\psi_i}{dx_1^2} (\delta w_i)^e \right. \\ \left. - R_1 (g)_j^e \frac{d\phi_j}{dx_1} \frac{d^2\psi_i}{dx_1^2} (\delta w_i)^e \right\} dx_1 \\ - V_1 (\delta w_1)^e - V_2 (\delta w_3)^e - M_1 (\delta w_2)^e - M_2 (\delta w_4)^e = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_0^\ell \left\{ G\kappa A w_5 \psi_5 \delta w_5 - EI (w_j)^e \frac{d^2\psi_j}{dx_1^2} \frac{d^2\psi_5}{dx_1^2} (\delta w_5)^e + R_1 (g)_j^e \frac{d\phi_j}{dx_1} \frac{d\psi_5}{dx_1} (\delta w_5)^e \right\} dx_1 = 0 \quad (13)$$

$$\int_0^\ell \left\{ R_3 (g)_j^e \phi_j \phi_i (\delta g)_i^e + \left( -R_1 (w_j)^e \frac{d^2\psi_j}{dx_1^2} + R_2 (g)_j^e \frac{d\phi_j}{dx_1} \right) \frac{d\phi_i}{dx_1} (\delta g)_i^e \right\} dx_1 = 0 \quad (14)$$

となる。ここで、 $V_i, M_i$ はそれぞれ節点 $i$ に作用する要素の軸方向に垂直方向の外力とモーメント外力であり、

$$(w)^e = \begin{Bmatrix} (u_3)_1^e \\ (\theta)_1^e \\ (u_3)_2^e \\ (\theta)_2^e \\ (\tilde{\gamma})^e \end{Bmatrix}, \quad \psi_5 = -\psi_2 - \psi_4$$

である。

式(12), (13), (14)および軸方向 $x_1$ についての通常の有限要素離散化を考えると、要素剛性方程式

$$ku = f \quad (15)$$

を得る。ここで、要素剛性行列 $k$ 、節点変位ベクトル $u$ 、等価節点外力ベクトル $f$ はそれぞれ

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2^T & k_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} (u_1)_1^e \\ (u_3)_1^e \\ (\theta)_1^e \\ (g)_1^e \\ (u_1)_2^e \\ (u_3)_2^e \\ (\theta)_2^e \\ (g)_2^e \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} \frac{p\ell}{2} + H_1 \\ \frac{q\ell}{2} + V_1 \\ -\frac{q\ell^2}{12} + M_1 \\ 0 \\ \frac{p\ell}{2} + H_2 \\ \frac{q\ell}{2} + V_2 \\ \frac{q\ell^2}{12} + M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

である。ここで、 $H_i$ は節点 $i$ に作用する要素の軸方向の外力、 $p(x_1)$ は要素に沿った分布外力である。要素剛性行列において

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ & & \frac{2}{\alpha} \left( 1 + \frac{3EI}{\ell^2 G\kappa A} \right) & \frac{R_1}{\ell} \\ \text{Symm.} & & & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\ell\alpha} & \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{6EI}{\ell^2 G\kappa A} \right) & -\frac{R_1}{\ell} \\ 0 & 0 & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{6} \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{\ell^2\alpha} & \frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\ell\alpha} & \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3EI}{\ell^2 GkA}\right) & \frac{R_1}{\ell} \\ \text{Symm.} & 0 & 0 & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{2EI} + \frac{6}{\ell GkA}$$

を用いた。

## 5. ラーメン構造のせん断遅れ解析

奥村ら<sup>5)</sup>が実験で用いたモデルで解析を行う。モデルの寸法は図-6, 7に示す通りであり, 材料は3節の桁と同様の鋼を用いている。梁と平行に  $x_1$  座標, 柱と平行に  $x_3$  座標を設定した。図-6に示すように梁と柱の端部を棒材でつなぎ, 両点にそれぞれ 30 ton ずつ集中荷重を与える。梁の端部から 3450 mm における隅角部付近の上フランジで軸方向応力  $\sigma_1$  を求めている。この実験によって得られた応力を参照解とし, 各手法による結果と比較する。

4節のせん断遅れ解析を考慮した梁要素によるモデル化をして応力を求めた結果を本解析とする。梁と柱それぞれの代表体積要素を作成してせん断遅れ解析を行い,  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を求めた。ここでの軸方向要素分割数は梁と柱それぞれ 153 要素とし, 隅角部において各自由度は連続としている。境界条件は図-8に示すように柱の端部を埋め込み端として梁の端部のみに载荷するものとし, 柱の端部の節点に対して  $u_1 = 0, u_3 = 0, g = 0$  の境界条件を与え, 梁の端部の節点に対して  $x_1$  方向に  $\frac{30}{\sqrt{2}}$  ton,  $x_3$  方向に  $-\frac{30}{\sqrt{2}}$  ton の節点荷重を与えた。

比較のためにソリッド要素を用いた有限要素解析も行った。132,750 の 8 節点 6 面体アイソパラメトリック要素, 174,648 節点からなる有限要素モデルを作成し, 境界条件は本解析と同様としている。柱と梁の端部の断面中央部にそれぞれ仮想節点を作成し, 断面上の全節点と仮想節点を剛体要素で繋いだ。柱の端部の仮想節点に対して 3 方向の節点変位を拘束し, 梁の端部の仮想節点に対して節点外力を与えている。

隅角部付近の上フランジにおける軸方向応力  $\sigma_1$  の軸直角方向分布を図-9に示す。本解析の結果は実測値における最大値と最小値の平均付近で分布しており, 最大応力の実測値に対する相対差は本解析で -43.4%, FEM で -32.9% となった。

### 参考文献

- 1) 齊木 功, 鐘 一彰, 山田 真幸, 瀬戸川 敦, 岩熊 哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会応用力学論文集, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 2) 齊木 功, 西井 大樹, 岩熊 哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11-I.18, 2015.
- 3) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.
- 4) Zhou, S.J.: Finite Beam Element Considering Shear-Lag Effect in Box Girder, *J.Eng.Mech.*, vol.136, pp.1115-1122, 2010.

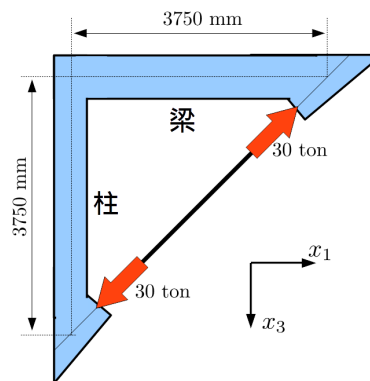


図-6 試験体寸法・境界条件

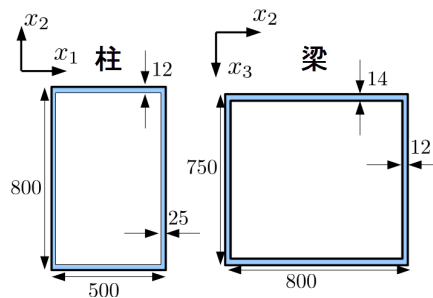


図-7 試験体断面形状

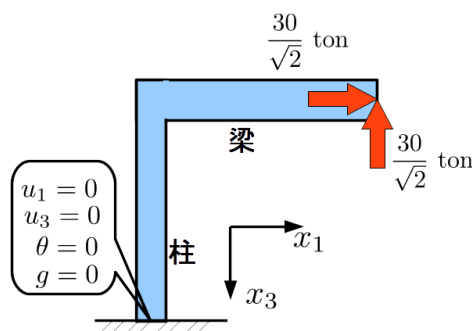


図-8 本解析とFEMにおける境界条件

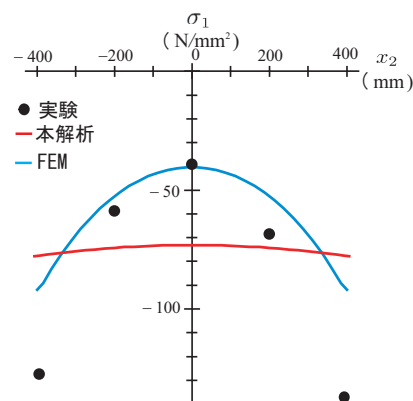


図-9 ラーメン隅角部のフランジにおける軸方向応力

- 5) 奥村 敏恵, 石沢 成夫: 薄板構造ラーメン隅角部の応力計算について, 土木学会論文集, No.153, pp.1-18, 1967.

(2017年2月2日提出)