

---

# 軸方向に非均質な Timoshenko 梁の せん断剛性評価に関する一考察

A consideration on evaluation of shear stiffness  
of axially heterogeneous Timoshenko beams

---

構造強度学研究室

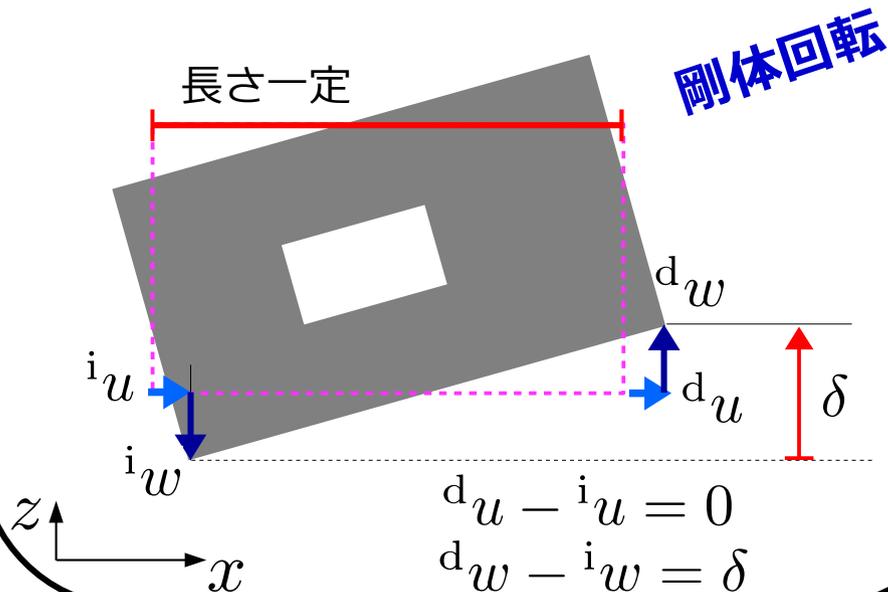
新井晃朋

軸方向に非均質な梁の平均せん断剛性を**数値実験**から求める。

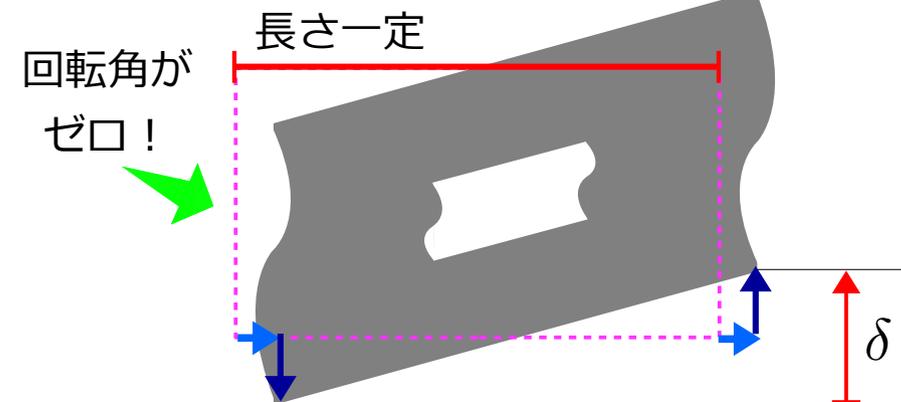
連続体でモデル化した梁にせん断変形させて  
**力と変位の関係**または**せん断応力分布**から剛性を評価。

周期境界条件（相対変位）で梁をせん断変形させる場合  
**剛体回転**させないために**断面の回転拘束**を行う必要がある。

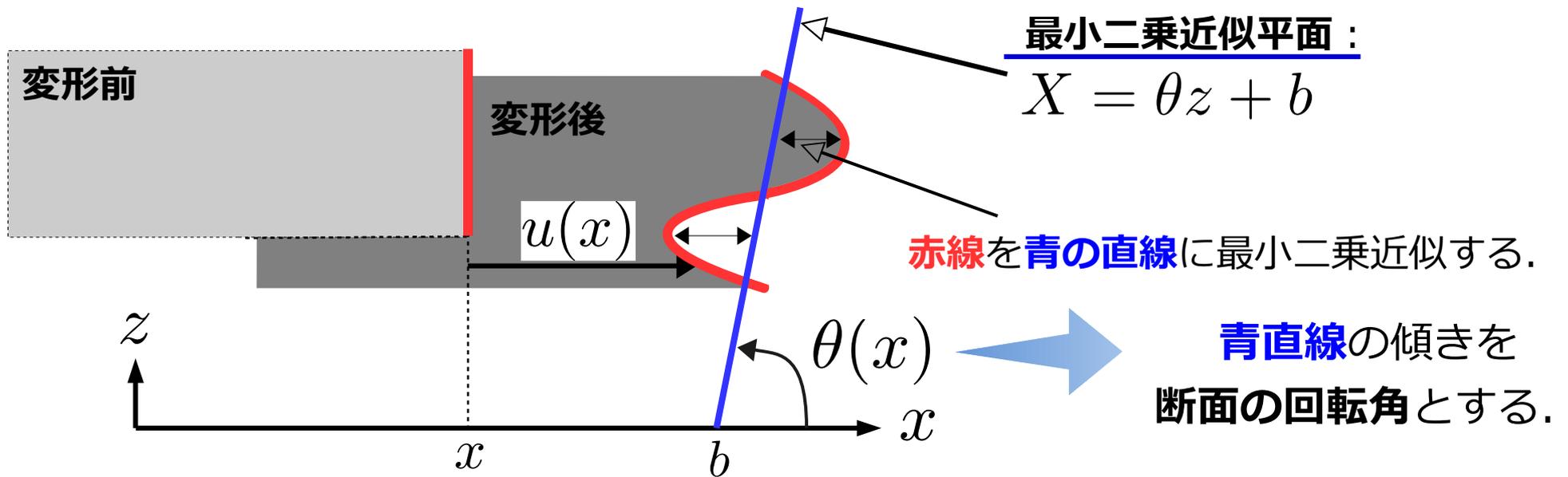
## 回転拘束なし



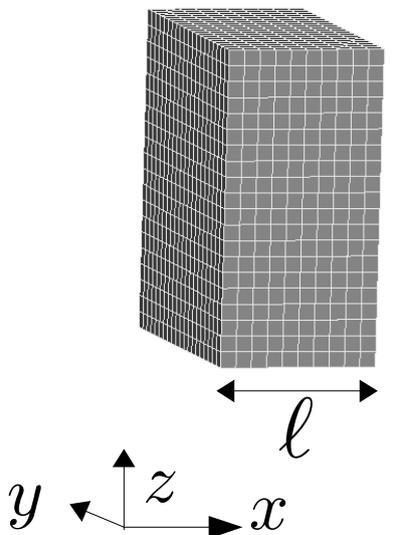
## 回転拘束あり



齊木ら（2012）：最小二乗近似平面の傾きを断面の回転角として定義



軸方向に一様な梁



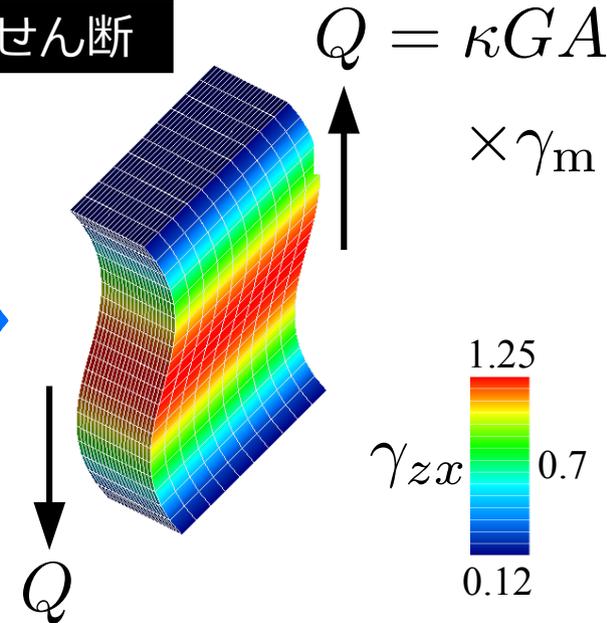
平均回転がゼロ

$$\frac{1}{l} \int_0^l \theta(x) dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{I(x)} dx$$

$$= 0$$

純せん断



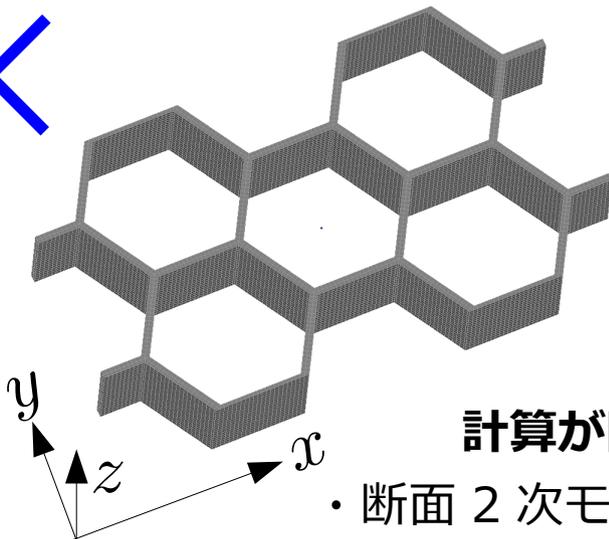
平均回転がゼロ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \theta(x) dx \\ &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{\underline{I(x)}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

複雑な構造には適用できない。

純せん断を与えられる  
対象が限られている

非一様な構造



計算が困難

- ・ 断面 2 次モーメント
- ・ 要素分割の制約



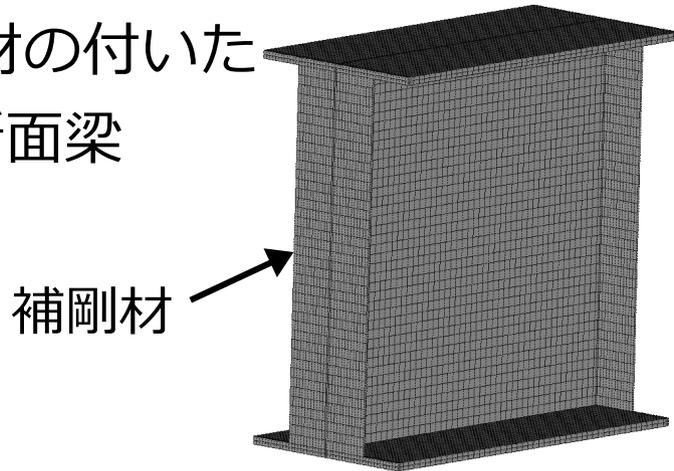
曲げせん断を与える

軸方向が非均質・非一様でも  
境界の回転だけを拘束できればよい

# 回転角拘束による曲げせん断

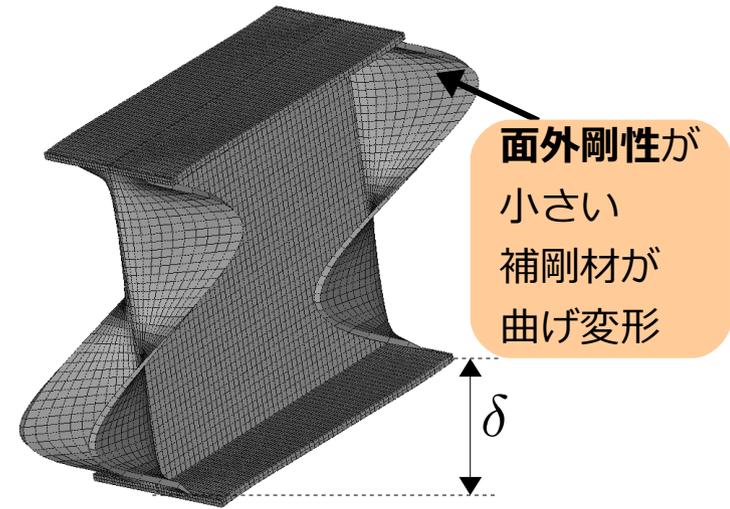
## 軸方向に**非一様**な梁

補剛材の付いた  
I 型断面梁



両境界で  
 $\theta = 0$

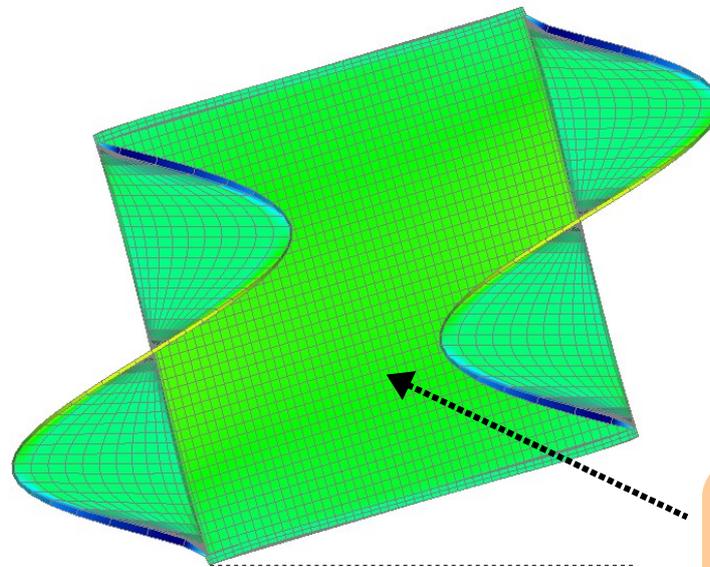
回転拘束して  
曲げせん断変形



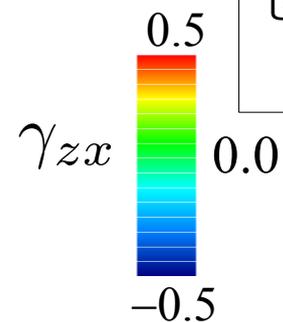
$$\theta(x) = \frac{\int_A z u(x) dA}{I_y(x)}$$

幾何学的な回転角の式を  
条件に用いるのは  
不適切である。

側面から  
見ると



せん断ひずみ  
コンター図



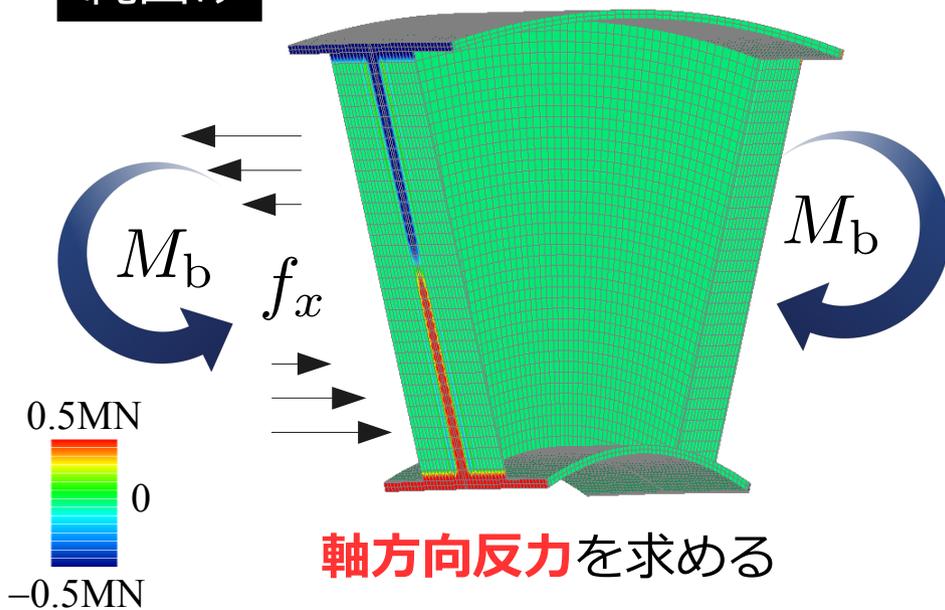
ウェブが剛体回転して  
せん断ひずみがゼロ  
せん断変形しない

## 純曲げ変形時の反力分布

梁の純曲げ変形時  
面内に面外剛性の違いがあっても  
平面が保持されている。

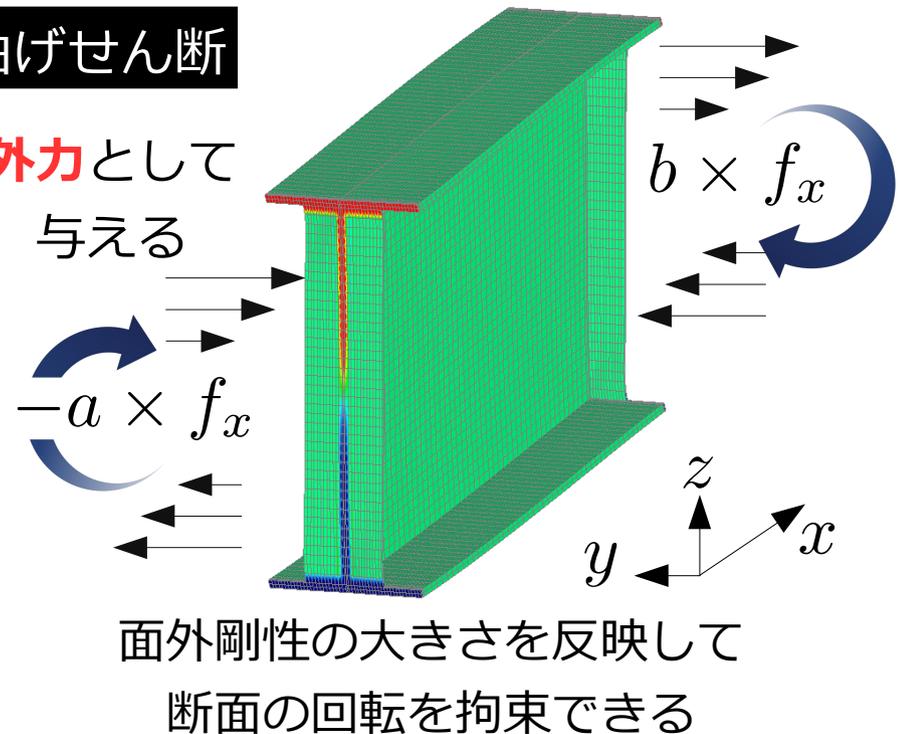
純曲げ変形時の反力分布は  
面外剛性の大きさを反映している。  
反力分布を用いれば  
適切に回転拘束ができる。

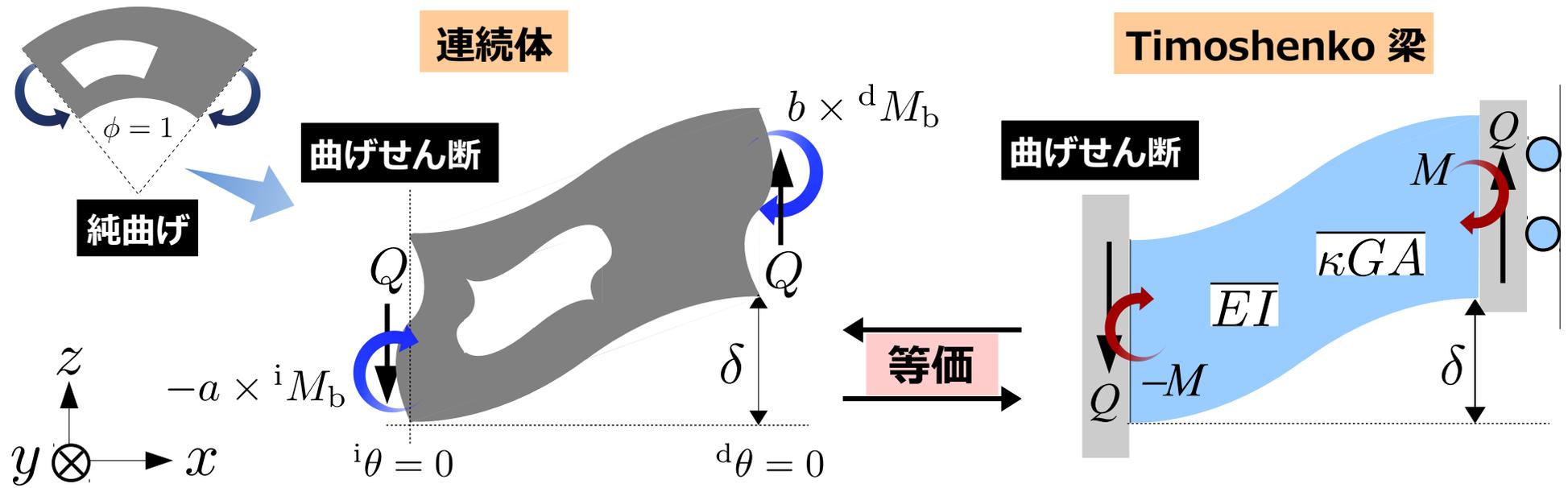
純曲げ



曲げせん断

外力として  
与える





1. 連続体を Timoshenko 梁とみなして“力と変位”の関係から

$$\delta = \frac{Ql^3}{12\overline{EI}} + \frac{Ql}{\overline{\kappa GA}}$$

(全たわみ)      (曲げ)      (せん断)

$$\overline{\kappa GA} = l \left( \frac{\delta}{Q} - \frac{l^3}{12\overline{EI}} \right)^{-1}$$

2. “エネルギー”の等価性を仮定して

$$\int_V \frac{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}}{2} dV = \int_0^l \frac{M^2}{2\overline{EI}} dx + \int_0^l \frac{Q^2}{2\overline{\kappa GA}} dx$$

(全ひずみエネルギー)      (曲げ)      (せん断)

$$\overline{\kappa GA} = \left( \frac{1}{lQ^2} \left\{ \int_V \sigma_{ij}\epsilon_{ij} dV - \int_0^l \frac{M^2}{2\overline{EI}} dx \right\} \right)^{-1}$$

# 検証：I型断面（均質・一様）

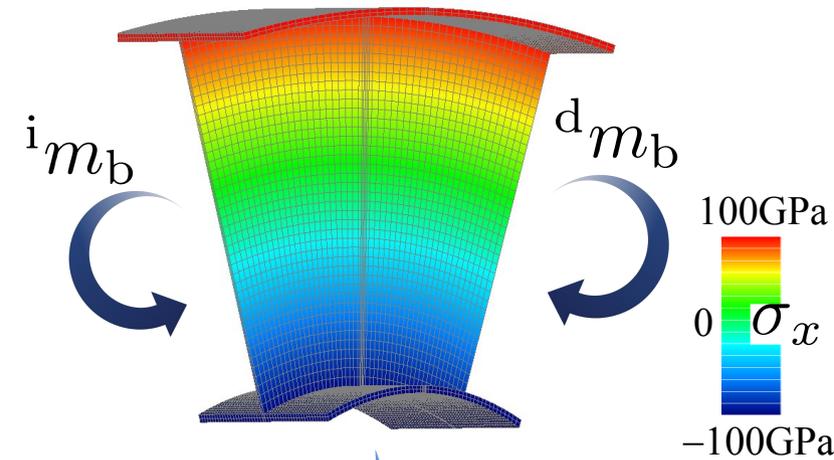
せん断剛性を評価して  
参照解と比較を行う

単位： $\times 10^8 \text{N}$

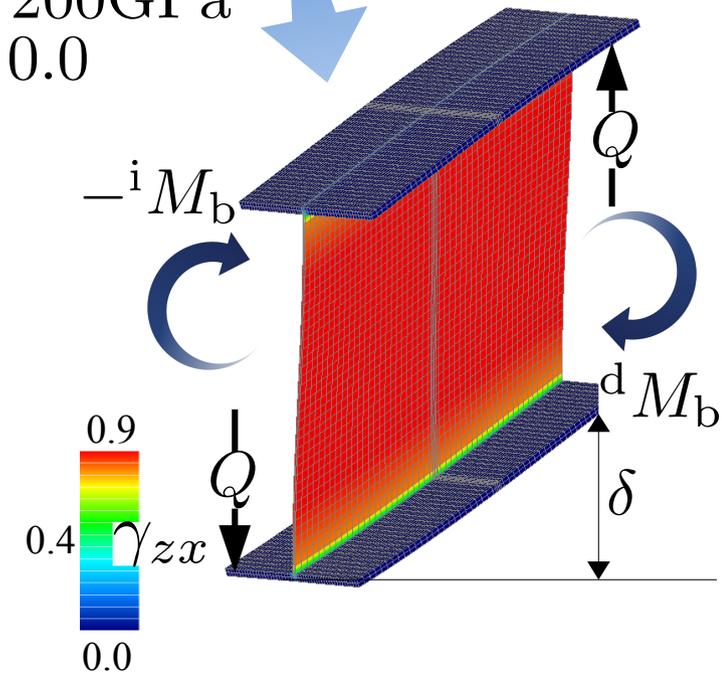
|             | 評価方法 1  | 評価方法 2  |
|-------------|---------|---------|
| $\kappa GA$ | 9.58302 | 9.58955 |
| Cowper      | 9.54002 |         |

| Cowper<br>との相対差 | 評価方法 1                 | 評価方法 2                 |
|-----------------|------------------------|------------------------|
|                 | $4.51 \times 10^{-03}$ | $5.19 \times 10^{-03}$ |

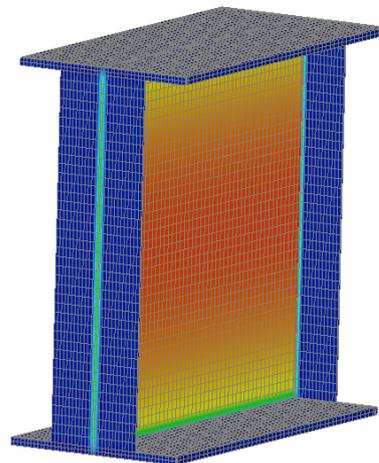
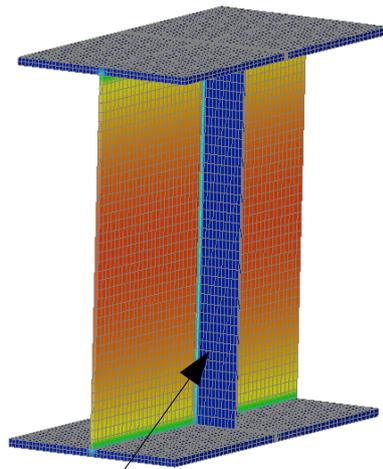
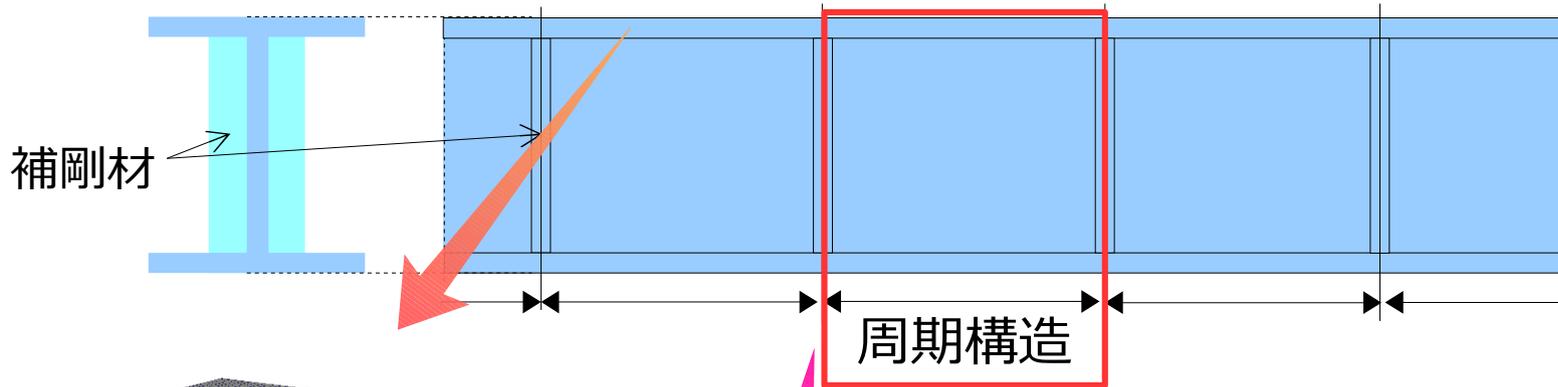
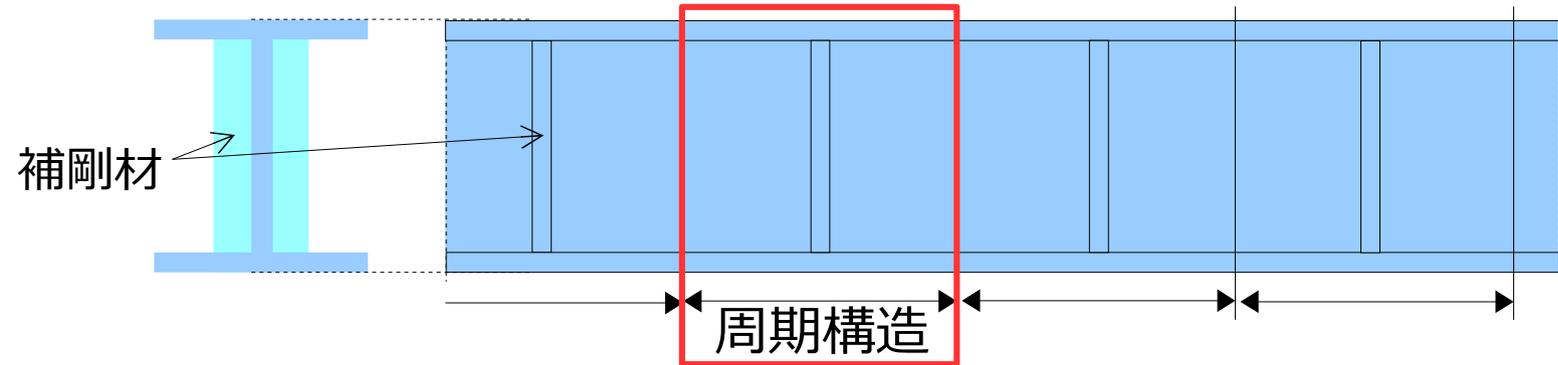
評価方法 1 と 2, どちらを用いても  
参照解に近い値を求めることができた.



$\ell = 1.0 \text{m}$   
 $E = 200 \text{GPa}$   
 $\nu = 0.0$

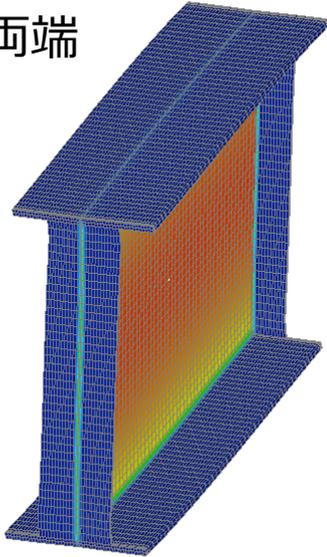


# 補剛材を持つ I 型断面梁 (非一様)

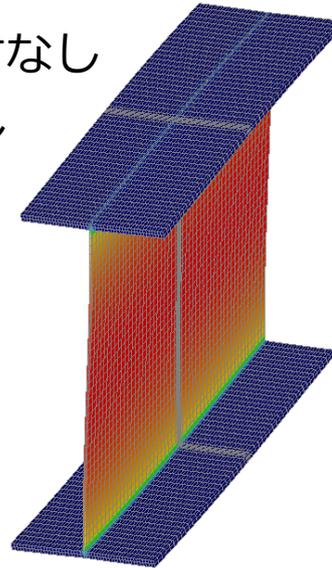


**非均質梁の平均せん断剛性**  
代表体積要素 (周期構造) の  
取り方によって平均剛性は  
変化しないはず。  
左の 2 つ代表体積要素から  
それぞれ剛性を評価し検証する.

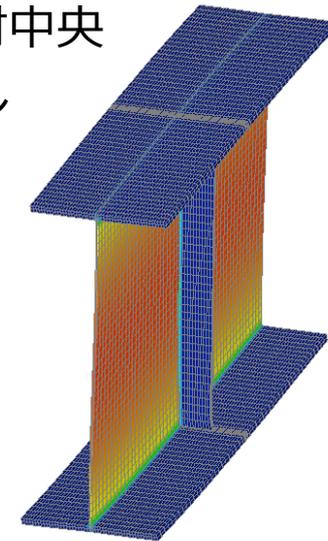
補剛材両端  
モデル



補剛材なし  
モデル



補剛材中央  
モデル



**評価方法 1** による代表体積要素の平均せん断剛性  
“力と変位”

9.3497

←  
-2.4%

9.5830

→  
+0.42%

9.6230

単位：  
 $\times 10^8 \text{N}$

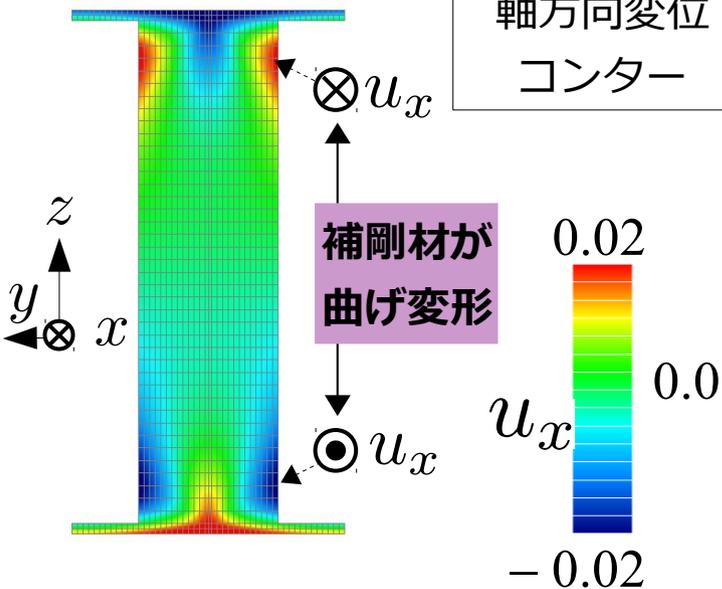
補剛材中央モデルは補剛材がないときより微増。  
補剛材両端モデルでは  
補剛材がついたことでせん断剛性が低下  
力学的には矛盾。



評価方法 1 による代表体積要素の平均せん断剛性  
"力と変位"

$$\overline{\kappa GA} = \ell \left( \frac{\delta}{Q} - \frac{\ell^3}{12EI} \right)^{-1}$$

両端モデルの境界面



**両端モデル**

補剛材の  
曲げ変形  
による回転

補剛材と  
逆回転

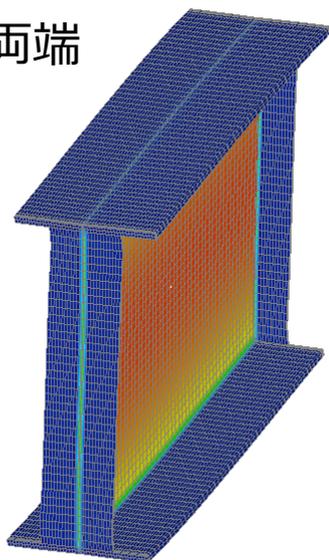
断面としての  
回転角はゼロ

**中央モデル**

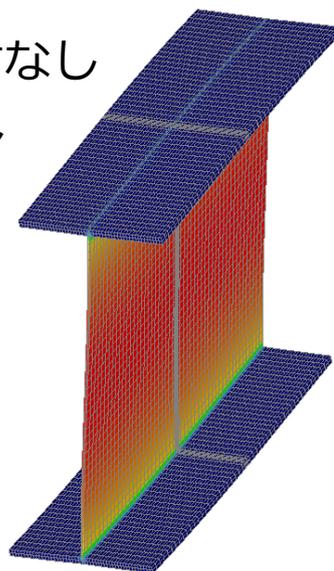
評価方法 1 は  
境界面の回転が  
上手く拘束されない  
と適切に評価できない

ウェブが回転拘束不足の状態  
(せん断力・曲げ不足の状態)  
で評価されたため  
せん断剛性が過小評価された

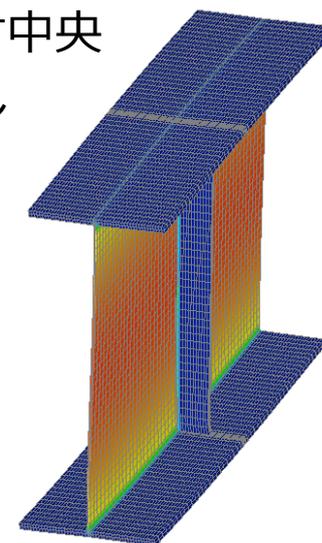
補剛材両端  
モデル



補剛材なし  
モデル



補剛材中央  
モデル



**評価方法 2** による代表体積要素の平均せん断剛性  
(エネルギーの等価性)

9.6371

← +0.50%

9.5896

→ +0.50%

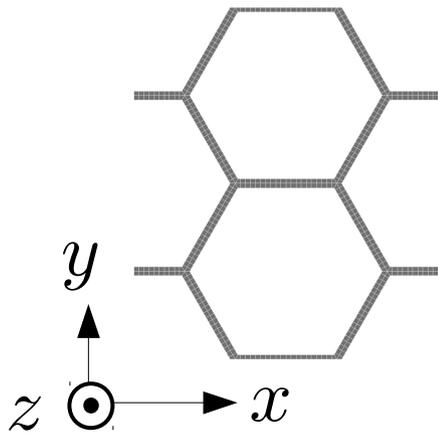
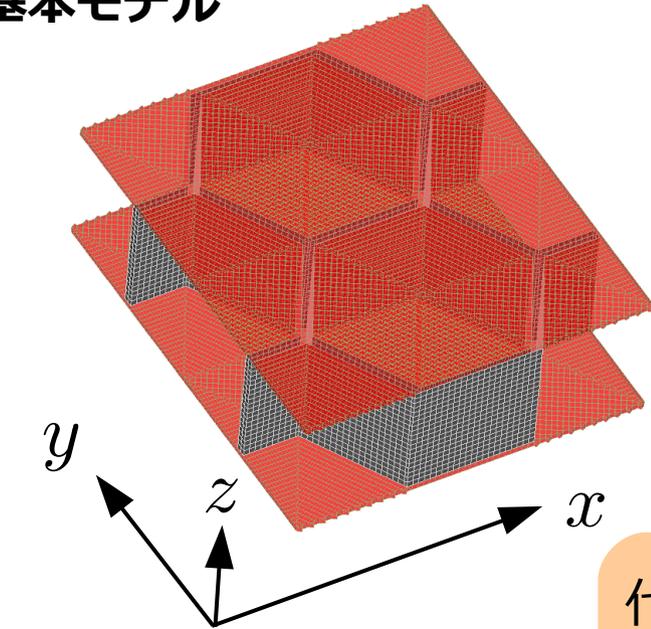
9.6375

単位：  
 $\times 10^8 \text{N}$

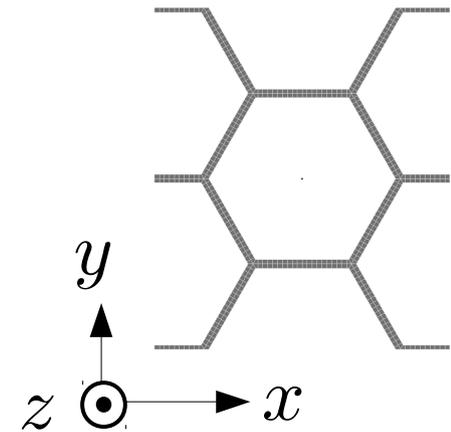
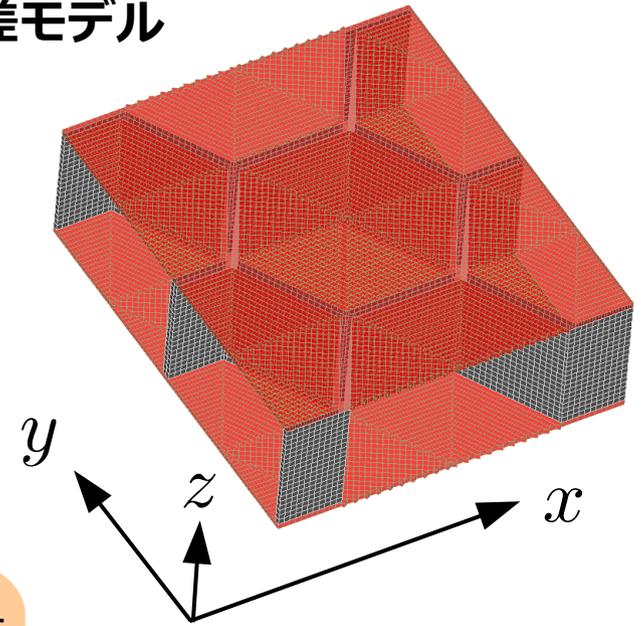
両端・中央の両モデルで一樣な I 形断面梁の  
せん断剛性と近い値を持つせん断剛性を評価できた

エネルギーの等価性を利用した評価方法により  
回転角に依存せず、せん断剛性を求めることができる。

## 基本モデル



## 半周期差モデル



代表体積要素の取り方に  
依らずにせん断剛性が  
変わらないか確認

スキン材とコア材は  
同一材料

$$E = 200\text{GPa}$$
$$\nu = 0.0$$

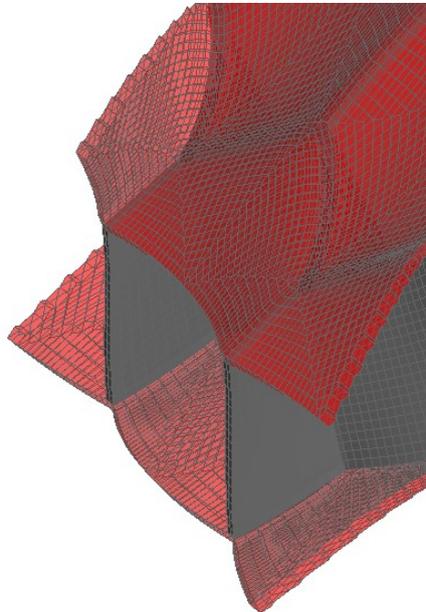
# ハニカムサンドウィッチ

2つのモデルに  
せん断変形を与えて  
2つの評価方法で  
せん断剛性を評価

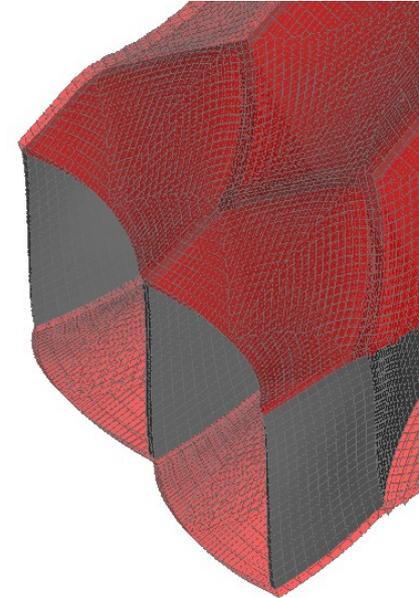
|             | 力と変位    | エネルギー   |
|-------------|---------|---------|
|             | 評価方法 1  | 評価方法 2  |
| 基本モデル (A)   | 5.67673 | 5.62782 |
| 半周期差モデル (B) | 5.56124 | 5.50581 |
| $(B-A)/A$   | -2.03%  | -2.17%  |

単位 :  $\times 10^8 \text{N}$

基本モデル (A)



半周期差モデル (B)



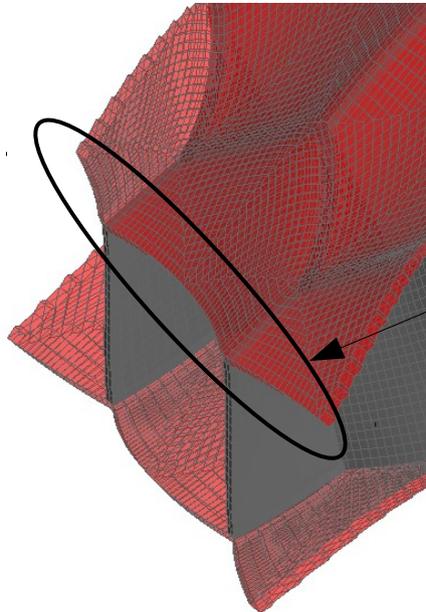
どちらの評価方法でも代表体積要素の取り方により  
2% ほどせん断剛性が違う。  
(基本モデルの方が硬い)

2つのモデルにせん断変形を与えて2つの評価方法でせん断剛性を評価

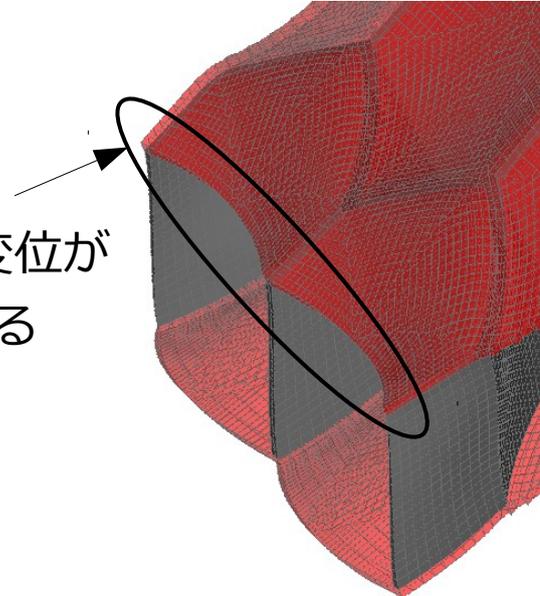
|             | 力と変位    | エネルギー   |
|-------------|---------|---------|
|             | 評価方法 1  | 評価方法 2  |
| 基本モデル (A)   | 5.67673 | 5.62782 |
| 半周期差モデル (B) | 5.56124 | 5.50581 |
| $(B-A)/A$   | -2.03%  | -2.17%  |

単位 :  $\times 10^8 \text{N}$

基本モデル (A)



半周期差モデル (B)

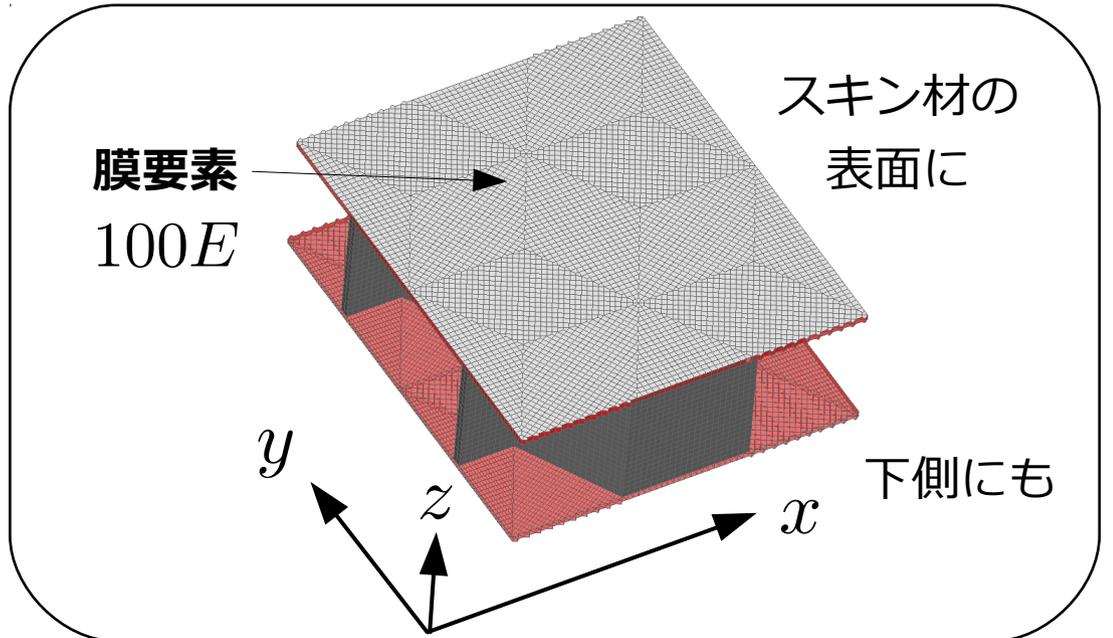
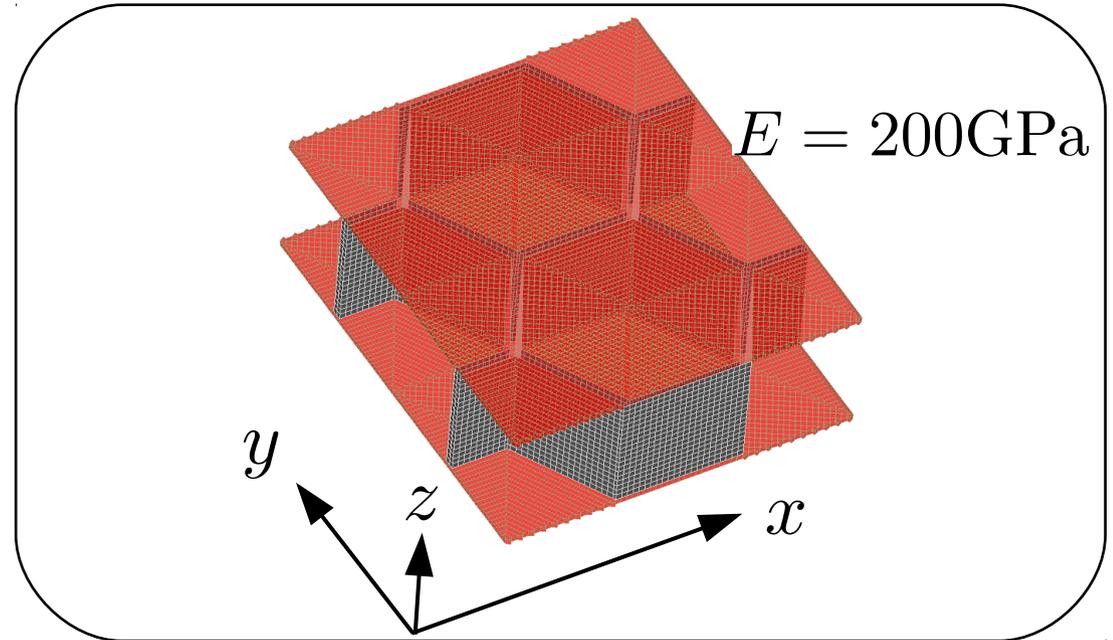


せん断遅れ変位が生じている

せん断遅れがせん断剛性に影響しているのか？

せん断遅れがせん断剛性に  
及ぼす影響を見るため  
スキン材に**膜要素**をつけて  
せん断遅れを  
生じさせないようにしてみる

**膜要素：**  
面外剛性を持たないので  
代表体積要素の  
せん断剛性には寄与しないはず



# ハニカムサンドウィッチ

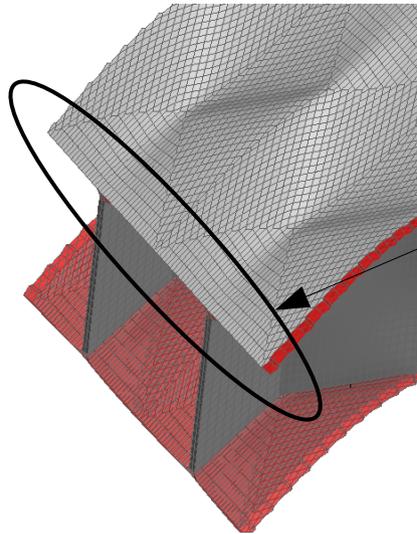
単位 :  $\times 10^8 \text{N}$

両モデルを  
せん断変形させて  
評価方法 1 により  
せん断剛性を評価

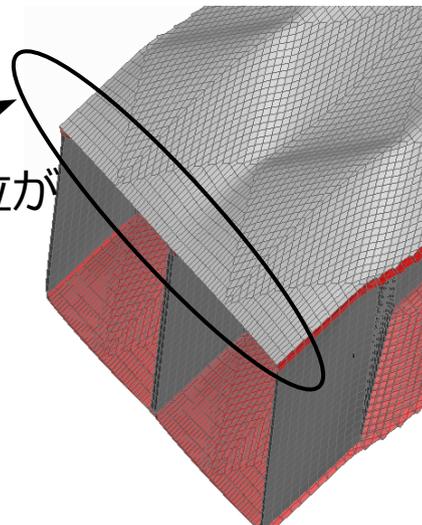
|             | 膜要素なし   | 膜要素あり   |
|-------------|---------|---------|
| 基本モデル (A)   | 5.67673 | 7.67939 |
| 半周期差モデル (B) | 5.56124 | 7.67751 |
| $(B-A)/A$   | -2.03%  | -0.024% |

差が  $\frac{1}{100}$

基本モデル (A)



半周期差モデル (B)



せん断遅れ変位が  
小さくなった。  
1/20 に減少

せん断遅れが小さくなり  
代表体積要素の違いによる  
せん断剛性の差が小さくなった

# ハニカムサンドウィッチ

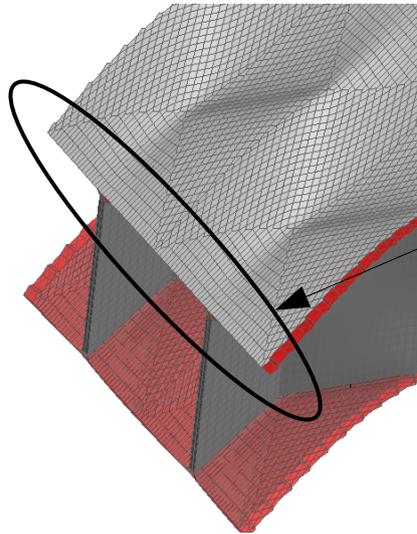
単位 :  $\times 10^8 \text{N}$

両モデルを  
せん断変形させて  
評価方法 1 により  
せん断剛性を評価

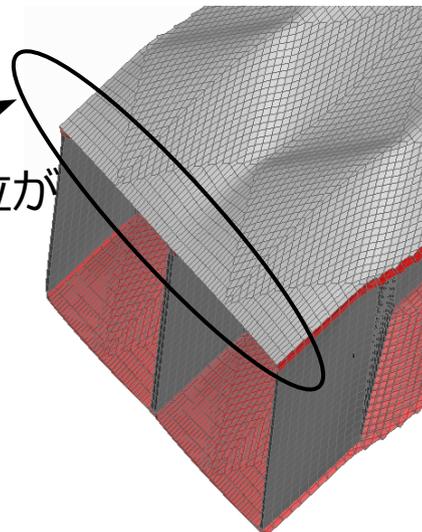
|             | 膜要素なし   | 膜要素あり   |
|-------------|---------|---------|
| 基本モデル (A)   | 5.67673 | 7.67939 |
| 半周期差モデル (B) | 5.56124 | 7.67751 |
| $(B-A)/A$   | -2.03%  | -0.024% |

約 35% 増加

基本モデル (A)



半周期差モデル (B)



せん断遅れ変位が  
小さくなった。  
1/20 に減少

せん断遅れが小さくなり、  
せん断遅れがあった時に比べて  
せん断剛性が 35% 増加した

- 軸方向に非均質・非一様な梁に対して剛体回転を拘束することができ、平均せん断剛性を求めることができた。
- 梁にせん断変形を与えることができれば、ひずみエネルギーの等価性から評価する方法を用いて、断面の回転拘束の不適切さに対して鈍感にせん断剛性を求めることができる。
- せん断遅れが生じるサンドウィッチパネルは、代表体積要素の取り方によって評価されるせん断剛性が違う。また、せん断遅れによりせん断剛性が小さくなることがわかった。