

せん断抵抗特性の違いからみた亜弾性に用いる応力速度の選択

Choice of stress rate for hypoelasticity from the viewpoint of shear resistance characteristics

藤本真明*

Masaaki FUJIMOTO

*構造強度学研究室（指導教員：岩熊哲夫 教授）

亜弾性に用いる客観的な応力速度には Cauchy 応力の Jaumann 速度がよく用いられるが、角度変化のない共回転的な材料埋め込み座標で記述しているため、せん断抵抗特性を正確に表現できていない可能性がある。これに対し、Truesdell 応力速度は回転のみならず角度変化も考慮した埋め込み座標から応力変化を観測する。そこで本研究では、2 種類の異なるせん断構成則を持つ Timoshenko 梁理論を比較対象として、共回転応力速度と Truesdell 応力速度の系列を用いた亜弾性が持つせん断抵抗特性の適用範囲の違いを考察した。

Key Words: hypoelasticity, objective stress rate, shear deformation

1. まえがき

Cauchy 応力の Jaumann 速度が亜弾性によく用いられるが、大きなせん断変形で振動する。また非保存的な問題点解決のために種々のスピンドで定義し直す研究²⁾もあるが、共回転的な応力速度以外が示すせん断抵抗特性の方が材料の挙動を正確に表現している可能性もある。そこで、材料と共に回転するだけでなく変形もする座標系から定義した応力速度との差異を、例えば Truesdell 応力速度等を用いて比較検討した。

2. 客観的な応力速度とその間の関係

共回転応力速度として Cauchy 応力と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$, $\overset{\nabla}{\tau}^K$ を、ゆがんだ座標系で観察した応力速度として Oldroyd 応力速度 $\overset{\square}{\sigma}$ と Truesdell 応力速度 $\overset{\triangledown}{\sigma}$ を取り上げ比較する。前者2つと後者2つの差は $(d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki})$ であるが、この違いを明確に示すために、さらに次のような改訂した応力速度も用いる。

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki}, \quad (1a)$$

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^K \equiv \dot{\tau}_{ij} + \sigma_{ij}d_{kk}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij}^{\text{mod}} \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}d_{kk} \quad (1b, c)$$

を Jaumann 速度系列と呼び

$$\overset{\square}{\sigma}_{ij} \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - (d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}), \quad (2a)$$

$$\overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} \equiv \overset{\square}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}d_{kk}, \quad \overset{\triangledown}{\sigma}_{ij}^{\text{mod}} \equiv \overset{\square}{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}d_{kk} \quad (2b, c)$$

を Truesdell 速度系列と呼ぶことにする。

3. Timoshenko 梁のせん断構成則

Timoshenko 梁理論には2種類のせん断構成則³⁾がある。高次理論の方は、軸力 N の向きが梁断面の法線方向 v と図-1のようにずれるため、せん断力 V が

$$N = EA\epsilon, \quad V = Gk_T A\gamma + N \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \quad (3a, b)$$

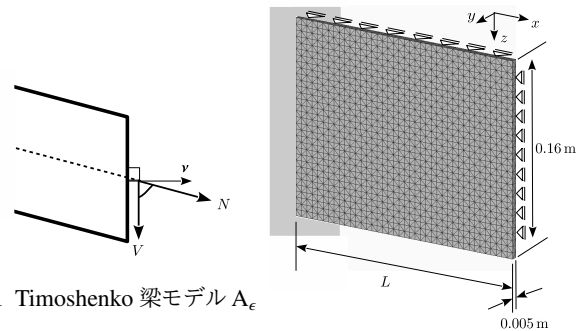


図-1 Timoshenko 梁モデル A_ϵ

図-2 解析に用いた梁

のようにせん断変形 γ と関係付けられる。ここに、 ϵ は軸の伸び、 E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 k_T は補正係数である。式(3b)の第2項が軸力によるせん断力成分であり、このモデルを「モデル A_ϵ 」と呼ぶ。これに対し、この第2項を無視したモデルを「モデル B_ϵ 」と呼ぶ。前者から得られる座屈荷重は Engesser 公式⁴⁾になり、後者はその改訂公式である。この軸力の向きが断面の法線方向からずれる効果に着目し、2種類の応力速度が予測する挙動と比較する。

4. 数値結果と考察

(1) 片持ち梁にせん断応力を与えた場合の抵抗特性

図-2のように、せん断の影響が顕著になるように $L = 0.2$ m の極端に短い片持ち梁の自由端に z 方向にせん断力 P を与えた。ねじれが生じないように梁全体にわたって y 方向は拘束した。図-3に結果を示した。横軸は自由端の z 方向変位 W を L で除した値、縦軸は荷重を正規化した PL^2/EI である。 L は変形前の値、梁の断面二次モーメント I は変形後の値を用いている。Truesdell 応力速度を用いた場合は、モデル A_ϵ の挙動とほぼ重なる

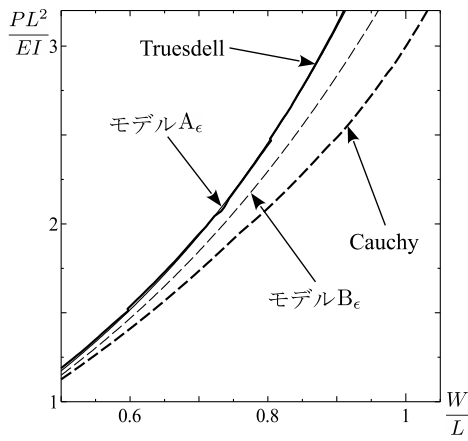


図-3 せん断力に対する応答

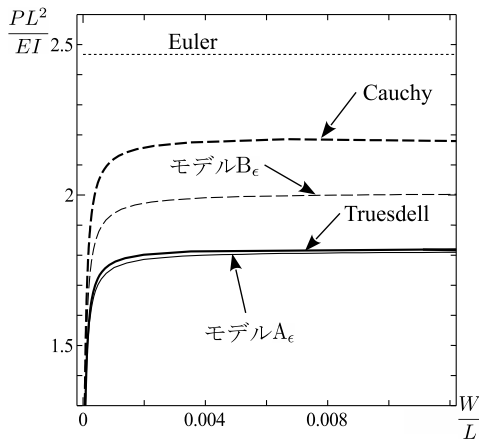


図-4 座屈後の挙動

一方、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合には、変位が大きくなるにつれて梁理論による解との差が大きくなっている。これは文献¹⁾にある大きなせん断変形に対しては振動抵抗を示すという問題点が現れたためであると考えられる。

(2) 初期不整のある柱の座屈後挙動

(1)と同様の片持ち梁の先端に z 方向の初期たわみ 0.001 m を与えて 0.5% だけ傾けた状態の先端に軸力をかけて座屈させた。図-4に結果を示した。ここでの P は軸力である。この場合も Truesdell 応力速度を用いた場合は、モデル A_ϵ の挙動とほぼ重なる。一方、Jaumann 速度は Euler 荷重とモデル B_ϵ の座屈荷重のほぼ中間の荷重で座屈した。以上の結果から、Jaumann 速度系列はせん断変形の影響を十分には考慮できていないモデル B_ϵ の方に近い特性しか持っていないことがわかる。

(3) 柱の座屈荷重

最後に、座屈前のせん断変形が無いまっすぐな柱の座屈荷重 P_{cr} を、接線剛性の正值性が失われる点でとらえる。柱の長さ L はさらに短いものも含め、 0.1 m 、 0.125 m 、 0.15 m 、 0.175 m 、 0.2 m 、 0.3 m 、 0.4 m のそれぞれの場合で解析した。結果を図-5に示した。横軸は梁

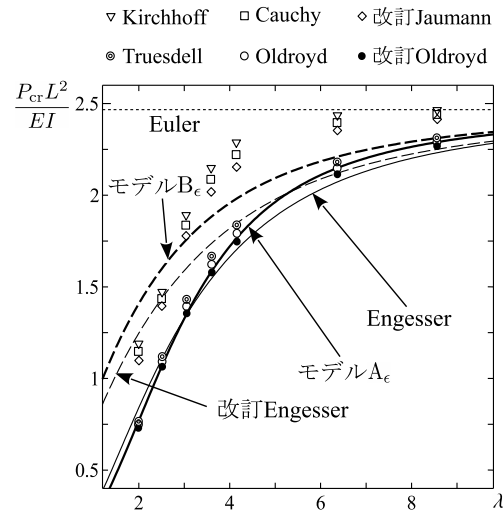


図-5 柱の細長比と座屈荷重の関係

の細長比 $\lambda = L/\sqrt{I_A}$ である。 L は変形前の値、 I と A は変形後の値を用いている。Truesdell 速度系列を用いた場合は細長比に関わらずモデル A_ϵ の座屈荷重とよく整合した。一方、Jaumann 速度系列を用いた場合は、細長比の大きい場合は Euler 荷重に、小さい場合はモデル B_ϵ の座屈荷重や改訂 Engesser 荷重に近く、Timoshenko 梁理論とはあまり整合しない結果となった。

5. まとめ

Timoshenko 梁理論が持つ2種類の構成モデルと比較することによって、種々の応力速度を用いた場合の非弾性が持つせん断抵抗特性を比較した。その結果、Jaumann 速度系列は、直応力とせん断応力の直交性が崩れるような材料のせん断抵抗特性を精度よく表すことができないことがわかった。したがって、例えば金属単結晶のような材料の構成モデルに限定して用いるのが適切であると考えられる。これに対し Truesdell 速度系列は、せん断変形の影響を、その変形の大小に関わらず精度よく表現できることが明らかになり、適用できる材料の範囲は広いと考えられる。

参考文献

- 1) Lee, E.H., Mallett, R.L. and Wertheimer, T.B.: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.50, pp.554-560, 1983.
- 2) Har, J.: A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.196, pp.3248-3275, 2007.
- 3) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Comput. Struct.*, Vol.34, pp.239-250, 1990.
- 4) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.

(2016年2月9日提出)