

周期境界条件を用いたせん断遅れの半解析的手法に関する基礎的検討

Fundamental Consideration on Semianalytic Approach for Shear Lag using Periodic Boundary Condition

西井 大樹*

Daiki NISHII

*構造強度学研究室（指導教員：斉木 功 准教授）

合成桁のような幅広フランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は、せん断遅れのために一定にならない。単純な断面形状であれば橋軸方向応力分布を仮定して解析的にせん断応力を考慮することができる。しかし、合成桁のような複雑な断面の桁における橋軸方向応力分布は自明ではない。そこで、本研究では均質化梁によって橋軸方向応力を数値的に求め、複雑な断面におけるせん断遅れの影響を半解析的に評価する方法を構築する。

Key Words: *periodic boundary condition, shear lag, homogenization method, finite element analysis*

1. はじめに

幅広フランジではウェブから離れると曲げ応力が小さくなるため、フランジの有効幅を考慮して初等梁理論を用いるのが一般的である。断面形状が単純ならば橋軸方向応力分布を仮定してせん断遅れを解析的に評価できるが、複雑な断面形状における橋軸方向応力分布は解析的に求められない。実際の設計ではフランジ幅と支間長の関数として有効幅を近似的に定めている。

一方で、周期境界条件を用いた均質化梁理論¹⁾により、梁の代表体積要素に曲げモーメントとせん断力を独立に作用させる自由度の高い数値要素試験が可能になった。そこで、本研究では均質化梁理論によって数値的に求めた変位分布を解析的手法²⁾に組み込み、簡便かつ高精度なせん断遅れの半解析的手法を提案する。

2. 解析手法

(1) 周期境界条件

本研究では図-1に示す x_1 方向に長さ r_1 の周期性を有する単位構造を代表体積要素とする。周期境界条件によるせん断変形は独立断面上の節点 i と従属断面上の節点 d のペアに対して面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ を用いて

$$\Delta u = u^d - u^i = \left\{ 0 \quad 0 \quad \tilde{\gamma} r_1 \right\}^T \quad (1)$$

という相対変位によって与えられる。

相対変位のみを与えた場合、代表体積要素は変形せず剛体回転してしまう。そこで、周期方向の各位置における断面の回転の平均を代表体積要素の回転とし、これを拘束することで剛体回転を拘束する¹⁾。

(2) せん断遅れを考慮した梁のたわみ

梁全体の中立面からせん断遅れを考慮する部材の図心軸までの距離を h 、たわみを z とすると、せん断遅れを

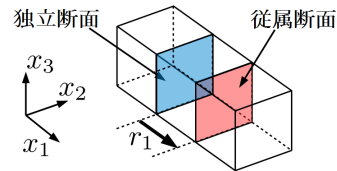


図-1 代表体積要素

考慮する部材の図心軸上の橋軸方向変位は

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = h \left\{ \frac{d^2 z}{dx_1^2} + f(x_2, x_3)g(x_1) \right\} \quad (2)$$

と表せる。 $f(x_2, x_3)$, $g(x_1)$ はそれぞれせん断遅れによる u_1 の相対的な分布と大きさを表す関数で、Reissner²⁾は f を x_2 の二次関数と仮定している。本解析では、任意形状断面の有限要素モデルに対して周期境界条件によりせん断変形を与え、得られた u_1 から数値的に f を求める。 g は後述する変分問題で求めるため、 f を最小値 0、最大値 1 となるように規格化する。

解析対象領域を V として、

$$V = S \times L \quad (3)$$

$$S = S_f \cup S_w, \quad S_f \cap S_w = \phi \quad (4)$$

$$L = \left\{ x_1 \mid -\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2} \right\} \quad (5)$$

と定義する。ここで、 ℓ は梁の長さ、 S_f はフランジや床版等のせん断遅れを考慮する部材の断面、 S_w はウェブ等それ以外の部材の断面である。

曲げを受ける梁の境界値問題と等価な変分問題は、系の全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = \Pi_f + \Pi_w - \Pi_l \quad (6)$$

を停留させる問題となる。ここで、 $S_f \times L$ のひずみエネルギーは

$$\Pi_f = \frac{1}{2} \int_L \int_{S_f} (E \epsilon_1^2 + G \gamma_{12}^2) dA dx_1 \quad (7)$$

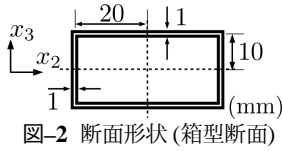


図-2 断面形状 (箱型断面)

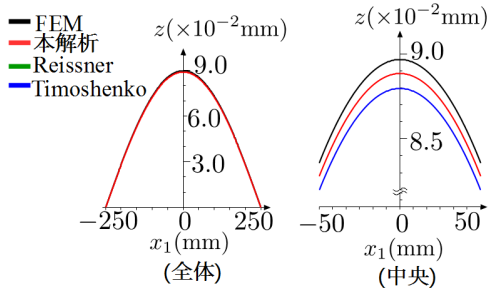


図-3 箱桁たわみ分布

$S_w \times L$ のひずみエネルギーは

$$\Pi_w = \frac{1}{2} \int_L EI_w \left(\frac{d^2 z}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (8)$$

外力ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi_l = \int_L q(x_1) z dx_1 \quad (9)$$

であり、Young 率 E 、せん断弾性係数 G 、 S_w の断面二次モーメント I_w 、単位長さあたりの鉛直外力 $q(x_1)$ 、橋軸方向ひずみ ϵ_1 、 $x_1 x_2$ 面せん断ひずみ γ_{12} を用いた。

f を既知とすると式 (6) の汎関数の停留条件 $\delta \Pi = 0$ から、 z と g に関する微分方程式

$$M + EI \frac{d^2 z}{dx_1^2} + \int_L \int_{S_f} h^2 E f \frac{dg}{dx_1} dA dx_1 = 0 \quad (10)$$

$$\int_L \int_{S_f} h^2 \left\{ E f \frac{d^3 z}{dx_1^3} + E f^2 \frac{d^2 g}{dx_1^2} - G \left(\frac{df}{dx_2} \right)^2 g \right\} dA dx_1 = 0 \quad (11)$$

が得られる。ここで、曲げモーメントを M と表した。

3. 解析例

(1) 箱型断面梁

図-2 に示す箱型断面の梁が単純支持されて等分布荷重 1 N/mm を受けるときのたわみを解析する。支間長は 500 mm 、Young 率は $1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$ 、Poisson 比は 0.25 とする。本解析に加えてせん断遅れを考慮しない Timoshenko 梁および f を放物線分布と仮定した²⁾手法 (以後、Reissner と呼ぶ) でたわみを求め、有限要素法による解 (以後 FEM と呼ぶ) と比較する。有限要素モデルには 8 節点 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて、十分に細かく分割した。

たわみの橋軸方向分布の全体図と中央付近の拡大図を図-3 に示す。FEM に対する各手法における最大たわみの相対誤差は本解析で -0.919% 、Reissner で -0.919% 、Timoshenko 梁で -1.90% となった。このことから、本解析が Reissner と同程度の精度でせん断遅れを解析できたことがわかる。

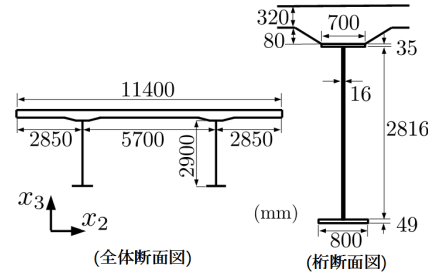


図-4 合成桁断面

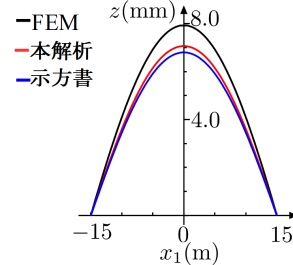


図-5 合成桁たわみ分布

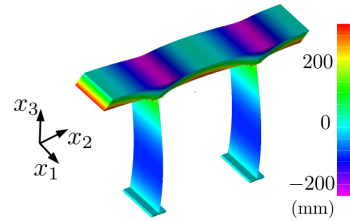


図-6 せん断変形図・橋軸方向変位

(2) 合成桁橋

図-4 に示す断面形状で 1 径間の鋼・コンクリート合成桁橋を解析する。単純な形ではないので、せん断遅れによる橋軸方向変位は自明ではない。周期境界条件のもとで、橋軸方向長さ 0.8 m の有限要素モデルに面外せん断ひずみ $\bar{\gamma} = 1.0$ を与えたときの変形と橋軸方向変位分布は図-6 のようになり、変位分布から数値的に f を求めて前節の手法に適用する。単位体積重量はコンクリートが 24.5 kN/m^3 、鋼が 77.0 kN/m^3 とし、支間長を 30 m として自重が作用した時のたわみを求める。本解析に加えて道路橋示方書に規定されている有効幅を Timoshenko 梁理論に適用した手法 (以後、示方書と呼ぶ) で解析し、FEM と比較する。

本解析、示方書、FEM におけるたわみの橋軸方向分布を図-5 に示す。最大たわみの FEM に対する相対誤差は本解析で -10.9% 、示方書で -14.2% となった。現実的なモデルについても本解析は示方書より高精度にたわみを求めることができた。

参考文献

- 1) 齊木功, 鎌一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 2) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.

(2015 年 2 月 10 日 提出)