二相複合材料平均弾性の解析的予測手法の一般化と改善の試み

Generalization and Improvement of Predictive Method of Biphase Composite Material Average Elasticity

鈴木貴大*
Takahiro SUZUKI

*構造強度学研究室（指導教員：岩熊哲夫　教授）

森・田中理論は複合材料平均弾性予測の一手法として使い易いが適用範囲があまり広くない．我々は 3 相材の森・田中平均によって， 2 相材料に対する既存の平均化手法を一般化できることを示した．本研究では本手法と Hill の self-consistent 法の関係を明らかにし，それを参考にした改善策とエネルギ的アプローチの改善を試みた．その結果として， Hashin-Shtrikman の上下界を狭めるような平均弾性の予測範囲を与えることができた．

Key Words: *composites, Mori-Tanaka theory, Hill's self-consistent method, strain energy*

1. まえがき

複合材料の平均挙動を解析的に予測する手法として森・田中理論[1)]は使い易いが適用範囲があまり広くないという欠点がある．我々は 3 相材の森・田中平均[2)]を 2 相材に適用することで， 2 相材料に対する既存の平均化手法を一般化できることを示した．また本手法により， Hill の self-consistent 法[3)]に整合する結果が得られることも示すことができる．本研究では本手法と self-consistent 法との関係を明らかにし，それを参考にした改善策とエネルギ的アプローチの改善を試みる．特に空隙のある材料の場合は， Hill の self-consistent 法による予測が体積比率 50% で破綻することが知られているが，それについても検討する．

2. 二相複合材料の平均挙動

(1) 3 相材の森・田中平均

基礎的な研究であり解析的に答えを求めたいことから，材料は全て等方弾性体で，母在中に球形の介在物 1, 2 が存在する場合の複合材料の平均体積弾性係数 $\bar{\kappa}$，平均せん断剛性係数 $\bar{\mu}$ を森・田中理論から求めた．

$$\bar{\kappa} = \kappa_{\mathrm{M}} \left[f_{\mathrm{M}} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha} \right\} \right]^{-1} \left[f_{\mathrm{M}} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)(\alpha - 1)}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha} \right\} \right] \tag{1a}$$

$$\bar{\mu} = \mu_{\mathrm{M}} \left[f_{\mathrm{M}} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\mu_{\mathrm{M}} - \mu_i)\,\beta}{\mu_{\mathrm{M}} - (\mu_{\mathrm{M}} - \mu_i)\,\beta} \right\} \right]^{-1} \left[f_{\mathrm{M}} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\mu_{\mathrm{M}} - \mu_i)(\beta - 1)}{\mu_{\mathrm{M}} - (\mu_{\mathrm{M}} - \mu_i)\,\beta} \right\} \right] \tag{1b}$$

ここに κ_{M}，μ_{M} は母材の体積弾性係数とせん断弾性係数， κ_i, μ_i は介在物 1, 2 の体積弾性係数とせん断弾性係数， α, β は Eshelby のテンソルを代表する係数で

$$\alpha = \frac{3\kappa_{\mathrm{M}}}{3\kappa_{\mathrm{M}} + 4\mu_{\mathrm{M}}}, \quad \beta = \frac{6\,(\kappa_{\mathrm{M}} + 2\mu_{\mathrm{M}})}{5\,(3\kappa_{\mathrm{M}} + 4\mu_{\mathrm{M}})} \tag{2a, b}$$

である．また f_{M} , f_i は母材と介在物 1, 2 それぞれの体積比率で $f_{\mathrm{M}} + f_1 + f_2 = 1$ を満たす．平均的にも等方性が成立すると考えて平均のヤング率，平均のポアソン比は

$$\bar{E} = \frac{9\bar{\kappa}\,\bar{\mu}}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}}, \quad \bar{\nu} = \frac{3\bar{\kappa} - 2\bar{\mu}}{6\bar{\kappa} + 2\bar{\mu}} \tag{3a, b}$$

と表せる．

(2) 2 相問題への適用

式 (1) において $f_1 + f_2 = 1$ とするような，すなわち母材の体積比率 f_{M} を零とする極限をとることによって，介在物として選んだ 2 種類の材料のみでできた複合材料の平均剛性を求められ，例えば平均体積弾性係数は

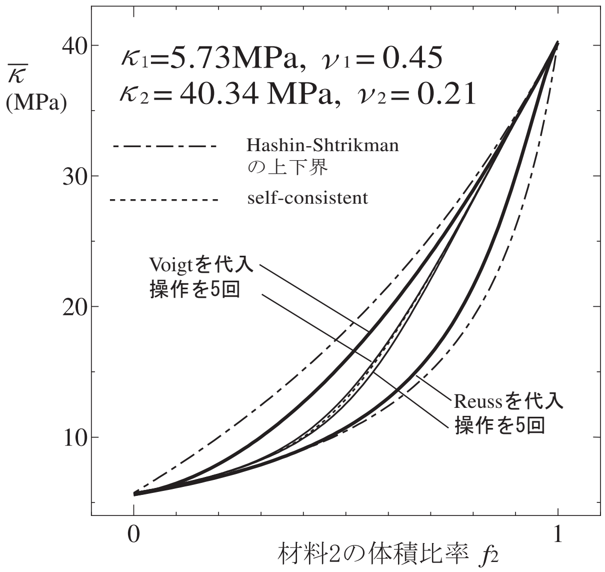
$$\bar{\kappa} = \kappa_{\mathrm{M}} \left[\sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha} \right\} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2} f_i \left\{ 1 + \frac{(\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)(\alpha - 1)}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\,\alpha} \right\} \right] \tag{4}$$

となる．式 (4) で $\kappa_{\mathrm{M}} \to \infty$ の極限をとると Voigt の解に一致し，同様に $\kappa_{\mathrm{M}} \to 0$ の極限で Reuss の解に一致する．せん断剛性係数についても同様である．このように式 (4) は，架空母材の弾性定数の選び方によって Voigt と Reuss の上下界の間のどんな解でも求めることができる．一方，式 (4) で $\kappa_{\mathrm{M}} \equiv \kappa_1$ あるいは $\kappa_{\mathrm{M}} \equiv \kappa_2$ とすることで Hashin-Shtrikman の上下界を得ることができる．以上のことから架空母材の弾性定数の選び方によって，適用範囲の広い予測が期待できる．

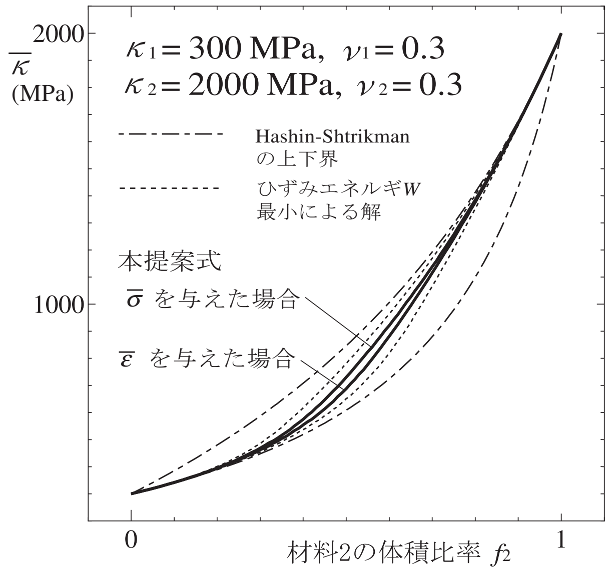
3. 架空母材の予測

(1) Hill の self-consistent 法との比較

材料 1, 材料 2 それぞれを取り巻く部分の材料定数は材料 1, 2 の平均として現れているはずなので，架空母



図–1 平均体積弾性係数の予測例 1



図–2 平均体積弾性係数の予測例 2

材自体が二相複合材料の平均としての弾性定数を持つ，すなわち $\kappa_{\mathrm{M}} \equiv \bar{\kappa}$, $\mu_{\mathrm{M}} \equiv \bar{\mu}$ のように架空母材の材料定数を選択すると式 (4) は Hill の self-consistent 法の解に一致する．次に二相複合材料の弾性定数として既存の平均化手法である Voigt, Reuss の上下界による解を選択してみると**図–1** のような平均体積弾性率の予測範囲の上下界を得られ，この予測範囲が Hashin-Shtricman の上下界よりも内側にあるのは非常に興味深い．そこで，得られた解を再び架空母材の材料定数に選択し平均体積弾性率の解を求める，という操作を複数回行うと解は self-consistent 法の解に漸近していく，例えばこの操作を 5 回行った解を**図–1** に示す．このことから架空母材を用いた平均解は Hill の self-consistent 法と本質的に一致していると想像できる．

(2)　エネルギ原理を用いた予測

架空母材の弾性定数の選び方のアプローチのひとつとして，二相複合材料の系全体のひずみエネルギを

$$W = \frac{1}{2}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f_i\,\boldsymbol{\varepsilon}_i^{*}\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\,(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{\varepsilon}_i^{*} \qquad (5)$$

と近似し[4]，ポテンシャルエネルギあるいは補ポテンシャルエネルギを最小とすること，つまり弾性係数またはコンプライアンスを最小にすることを考えた[2]．ここに $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は複合材料全体の平均応力テンソル，平均ひずみテンソルであり，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}$ は母材の弾性率テンソル，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．また下添え字 i は介在物 1，2 の諸量であることを表し，$\boldsymbol{S}_i$ は Eshelby のテンソルを表し，$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{*}$ は介在物の特性を代表させる eigen ひずみと呼ばれる非適合ひずみである．森・田中理論により介在物 1，2 に対応する eigen ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{*}$ は $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ あるいは $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ によって表現することができ，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ で表した W は補ひずみエネルギ $\boldsymbol{U}^{*}$，$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ で表した W はひずみエネルギ $\boldsymbol{U}$ に相当している．このように表現した補ひずみエネルギ，あるいはひずみエネルギを最小にするような架空母材の弾性定数 $\kappa_{\mathrm{M}}, \mu_{\mathrm{M}}$ の組を求め，式 (4) に代入することによって二相複合材料の平均剛性を求める．

ここで，式 (5) の第一項は $\kappa_{\mathrm{M}} \to \infty$ または $\kappa_{\mathrm{M}} \to 0$ の極限で最小値をとるので，式 (5) の第一項はひずみエネルギ最小によって求められる解を Voigt あるいは Reuss の解に近づけていると考えられる．よって式 (5) の第一項を除外して，式 (5) の第二項すなわち相互作用のエネルギだけを最小とする $\kappa_{\mathrm{M}}, \mu_{\mathrm{M}}$ の組を架空母材の弾性定数として選択した結果が**図–2** である．**図–2** 中で既往の研究による予測範囲[2]の中間に位置する平均体積弾性率の予測範囲を与えることができる．

4.　結論

- 架空母材の弾性定数が複合材料の平均になると考えることで Hashin-Shtrikman の上下界を狭め，Hill の self-consistent 法の解に漸近する平均剛性の予測範囲が得られた．
- 相互作用のエネルギを最小にすることで，既存の結果を狭めるような平均剛性の予測範囲を得られた．

参考文献

1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
2) 小山茂，岩熊哲夫，岩崎智明，小倉崇生，三井康司：複合材料と多結晶体の平均的性質，土木学会論文集，No. 661/I-53, pp.265-272, 2000.
3) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
4) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.

(2014 年 2 月 12 日 提出)