

増分弾塑性構成則に用いる亜弾性の応力速度の特性と変形の局所化

Characteristics of objective stress rates used in incremental elastoplastic constitutive law with hypoelasticity and Localization of deformation

荒川 淳平*

Junpei ARAKAWA

*構造強度学研究室 (指導教員: 岩熊 哲夫 教授)

In the framework of finite deformation, stress rates used incremental elastoplastic constitutive model need to be objective. The Jaumann rate of the Cauchy stress is extensively used. However, some problems resulting from the use of the Jaumann rate have been reported. On the other hand, it is known that the choice of the stress rates has no small effect on localization analysis results. In this paper, localization analyses with constitutive relations using several stress rates are conducted. Based on the results their characteristics and applicability are compared and classified, then appropriate stress rates for localization of deformation are proposed.

Key Words: hypoelasticity, objective stress rates, localization of deformation

1. まえがき

有限変形の枠組みにおける増分弾塑性構成則には客観性を有した応力速度を用いる必要があり, Cauchy 応力の Jaumann 速度が広く用いられているが, 必ずしもそれを用いなければならない規準は無い. 一方, 弾性構成則に Jaumann 速度を用いたときの問題点がいくつか報告されている¹⁾. また, 変形の局所化の解析的解に対しては, この応力速度の選択が少なからず影響することが分かっている. そこで本論文では, 局所化解析に基づいて客観的応力速度の持つ特性を分類し, 増分型構成則に適した応力速度を選び出す提案をする.

2. 構成モデルと応力速度

弾塑性構成則を定式化する場合, 変形速度 d は弾・塑性成分に加算分解して表すことがある. 弾性成分は増分型の Hooke 則に従い, 塑性成分は流れ則を満足すると定義すると

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad (1)$$

$$d_{ij}^e \equiv \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij}^* + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk}^* \quad (2)$$

$$d_{ij}^p \equiv \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

のようになる. ここで, $\dot{\sigma}^*$ は客観性を有する任意の応力速度, μ はせん断弾性係数, κ は体積弾性係数, δ_{ij} は Kronecker のデルタ, λ は塑性乗数, f は降伏関数である.

式 (2) の客観的応力速度 $\dot{\sigma}^*$ として広く用いられる Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ は物体と一緒に回転している座標から応力変化を観察する尺度である. 一方, 構成則は Lagrange 的であるのが望ましいことから, 本論文で

は, 回転の影響だけでなく材料の伸縮による変化の影響も重要であると考え, Truesdell 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$, Oldroyd 速度 $\overset{\square}{\sigma}$, convected 速度 $\overset{\diamond}{\sigma}$ を用いることにする. それぞれ

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \quad (4)$$

$$\overset{\square}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} + d_{kk}\sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\overset{\square}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} \quad (6)$$

$$\overset{\diamond}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}v_{k,j} + \sigma_{jk}v_{k,i} \quad (7)$$

で定義される. ここで w はスピン, ∇v は速度勾配である. なお, 超弾性の updated Lagrange 的な構成関係に基づく Truesdell 速度は回転と材料の伸縮および体積変化を伴った座標から観察する尺度である. 一方, Oldroyd 速度と convected 速度はどちらも回転と材料の伸縮を伴う座標から観察する尺度であるが, 前者は共変座標, 後者は反変座標に基づく.

一般に, 任意の客観的応力速度に $d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}$ や $d_{kk}\sigma_{ij}$ を実数倍した項を加算したのももた客観性を有する²⁾ことから, 本論文では, Jaumann 速度にそれらの客観性を有する項を追加して

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^* \equiv & \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \\ & - n_1 (d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}) - n_2 d_{kk}\sigma_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

のように一般化した客観的応力速度を定義する. ここで n_1 と n_2 は実数で, Jaumann 速度は $n_1 = n_2 = 0$, Truesdell 速度は $n_1 = 1, n_2 = -1$, Oldroyd 速度は $n_1 = 1, n_2 = 0$, convected 速度は $n_1 = -1, n_2 = 0$ とした場合である.

塑性成分の構成モデルは一般化された Prandtl-Reuss モデルを基本とし, 降伏関数 f を

$$f \equiv \bar{\sigma} - F(\bar{\epsilon}^p) \quad (9)$$

と定義する．ここに $\bar{\sigma}$ は相当応力， $\bar{\epsilon}^p$ は累積相当塑性ひずみでそれぞれ

$$\bar{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \bar{\epsilon}^p \equiv \int_0^t \sqrt{2 d_{ij}^p d_{ij}^p} dt \quad (10)$$

のように定義³⁾されている．また，整合条件 $\dot{f} = 0$ を考慮すると式 (3) は

$$d_{ij}^p = \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4H\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11)$$

のように書き換えられる．ここに H を硬化係数と呼ぶ．

結局，式 (1) (2) (8) (11) より増分弾塑性構成則は次式のように表現できる．

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = C_{ijkl}^{ep} d_{kl} \quad (12)$$

ここに C^{ep} は弾塑性接線係数である．

3. 局所化規準

本論文では，客観的応力速度を扱う枠組みの中で，耐荷力解析に用いられる規準のひとつである変形の局所化条件を対象とし，有限変形理論に基づく局所化規準として Hill and Hutchinson⁴⁾ のモデルを用いることにする．ここでは，nominal 応力速度 \dot{n} と速度勾配 ∇v が

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \quad (13)$$

のように関係付けられるとする．また，不連続面をまたいだ表面力増分の連続条件から

$$\langle \nu_j \dot{n}_{ji} \rangle = 0 \quad (14)$$

が得られる．ここで ν はせん断帯の単位法線ベクトルである．結局，式 (13) (14) から

$$(\nu_i F_{ijkl} \nu_l) g_k = 0 \quad \rightarrow \quad \det(\nu_i F_{ijkl} \nu_l) = 0 \quad (15)$$

が成立したときに局所化が発生する可能性が生まれる．

4. 局所化解析の結果

本論文では，規準式 (15) を満足する正と負の応力の絶対値の最小をそれぞれ引張と圧縮における局所化発生応力 σ_{cr} と定義する．また一般的な鋼材料を対象とし，材料定数の Young 率 $E = 207 \text{ GN/m}^2$ ，Poisson 比 $\nu = 0.3$ と設定した．

(1) 代表的な 4 つの応力速度を用いた場合

まず，Jaumann 速度の結果との比較を主目的として，Truesdell 速度，Oldroyd 速度，convected 速度を亜弾性構成則に用いた場合の結果を示す．

a) 塑性的平面ひずみの場合

本論文では，塑性的な平面ひずみ状態を $d_{33}^p \equiv 0$ ，つまり $\sigma'_{33} = 0$ の場合で定義する．さらに $\nu_3 \equiv 0$ とし，せん断帯角度は $\tan \theta \equiv \nu_1/\nu_2$ と定義する．

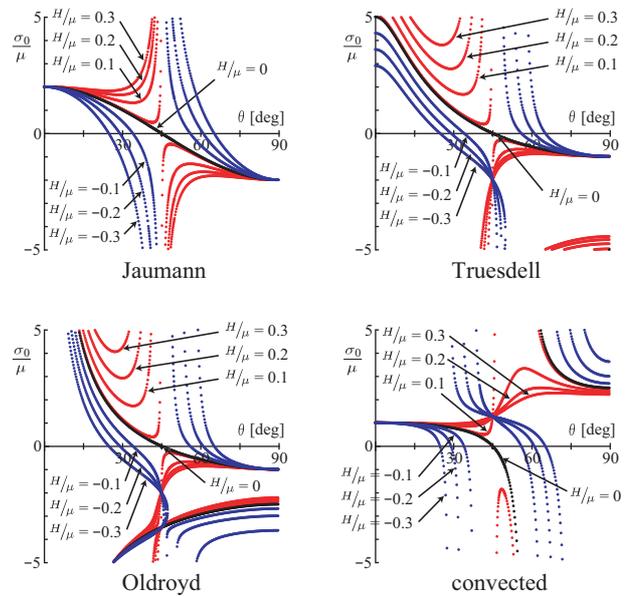


図-1 応力とせん断帯角度の関係 (塑性的平面ひずみ)

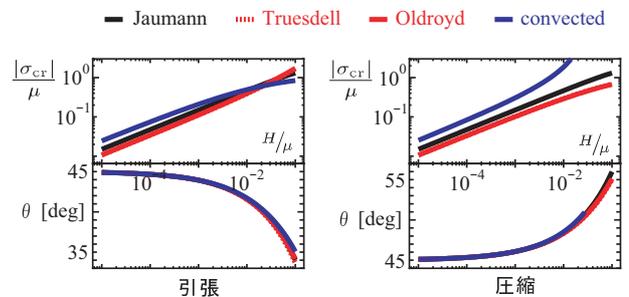


図-2 硬化パラメタの影響 (塑性的平面ひずみ)

図-1 に $\sigma_{11} = \sigma_0$ の様な載荷状態にある場合に，規準式 (15) を満足する応力 σ_0 とせん断帯角度 θ の関係を示す．なお，式 (15) は σ_0 と $\tan^2 \theta$ それぞれにおける 2 次方程式となる．これより，いずれの応力速度を用いた場合でも $H/\mu \leq 0$ のとき $\sigma_0 = 0$ の解が存在することが確認できる．つまり，塑性ひずみの増大に伴って軟化域に入る前の最大荷重点で降伏する瞬間にどの応力状態においても局所化がある向きに発生する可能性がある．特に $H/\mu = 0$ の場合には，いずれの場合でも $\theta = 45^\circ$ が解となり，これは微小変形理論の枠組みから求められる剛塑性体のせん断帯角度に一致する．一方， $H/\mu > 0$ の硬化域で局所化が発生するためには非零の応力状態である必要があり， H/μ の値が大きくなるほど応力レベルも大きくなる．しかし，応力速度によっては引張あるいは圧縮側における応力レベルの発達具合が異なる．

そこで，予測される局所化発生応力 σ_{cr} とせん断帯角度 θ の結果に及ぼす硬化パラメタ H/μ の影響を図-2 に示す．なお， H/μ の値は硬化域で応力レベルが小さくなる範囲で取った．これより，違いが体積変化の項の有無である Truesdell 速度と Oldroyd 速度は，その他の応力速度と比較して互いに非常に類似した結果を示した．

これは、変形の局所化現象は主にせん断変形が支配していることによって体積変化の影響が非常に小さくなるためであると考えられる．局所化応力の予測に関しては、いずれの応力速度も $H/\mu \approx 10^{-3}$ 以上でせん断弾性係数の $1/10$ 程度と非常に大きな応力レベルとなってしまうが、 H/μ が非常に小さい範囲になると Truesdell 速度と Oldroyd 速度の応力レベルが他と比べて小さくなり、特に圧縮側ではそれらは Jaumann 速度の $2/3$ 程度となった．このことから、客観的応力速度の定式化において、剛体回転の影響だけでなく材料の伸縮による変化の影響を考慮することの重要性が示された．一方、 $H/\mu > 0.03$ の範囲では、圧縮で convected 速度による解は得られなかった．これは、任意の θ に対して式 (15) を満足する 2 つの実根 σ_0 が共に正となるためである．なお、せん断帯角度の予測に関してはいずれの応力速度も類似した結果を示した．

b) 軸対称応力状態の場合

x_2, x_3 軸に関して対称な応力状態を考えることとし、荷重状態は $\sigma_{11} = \sigma_0, \sigma_{22} = \sigma_{33} \equiv k\sigma_0$ とする．ここに k は実数であるが、静水圧状態 ($k = 1$) の場合式 (12) の構成則は定義できないため $k \neq 1$ とする．さらに $\nu_2 \equiv \nu_3$ とし、せん断帯角度は $\tan \theta \equiv \nu_1/\sqrt{2\nu_2}$ と定義する．

本ケースにおいて $\sigma_0 = 0$ の解が存在する条件は、任意の k の値のとき、いずれの応力速度を用いた場合でも $H/\mu \leq -(1+\nu)/6$ となった．つまり、最大荷重点を越えて軟化域に入ってからある程度塑性ひずみが増大して $H/\mu = -(1+\nu)/6$ の状態になった瞬間にどの応力状態においても局所化がある向きに発生する可能性がある．一方、 $H/\mu > -(1+\nu)/6$ で局所化が発生するためには非零の応力状態である必要があり、 H/μ の値が大きくなるほど応力レベルも大きくなり、応力速度によって引張あるいは圧縮側における応力レベルの発達具合が異なる．

そこで、異なる k の値のときに予測される局所化発生応力 σ_{cr} とせん断帯角度 θ の結果に及ぼす硬化パラメタ H/μ の影響を図-3 に示す．なお、対数軸表示するため横軸は $H/\mu + (1+\nu)/6$ で取った．これより、塑性的平面ひずみの場合に比べて Truesdell 速度と Oldroyd 速度の差が若干現れてきている．これは、3 方向の軸応力により体積変化が生じているためである．局所化応力の予測に関しては、いずれの応力速度の場合も $H/\mu > 0$ の硬化域では局所化発生時に非常に大きな応力状態となる．また、静水圧状態に近いほど全体的に応力レベルは大きくなるが、特に、引張側で Truesdell 速度と Oldroyd 速度、圧縮側で convected 速度における応力レベルの変化率が顕著となる．これに対し、 $H/\mu + (1+\nu)/6$ が小さい範囲では、引張側で Truesdell 速度と Oldroyd 速度、圧縮側で convected 速度が Jaumann 速度に比べ 1 ~ 2 桁程小さい現実的な応力レベルで予測できている．このことから、やはり材料の伸縮による変化の影響は少なからず存在している．また、 k の値が 1 に近い状態あるいは

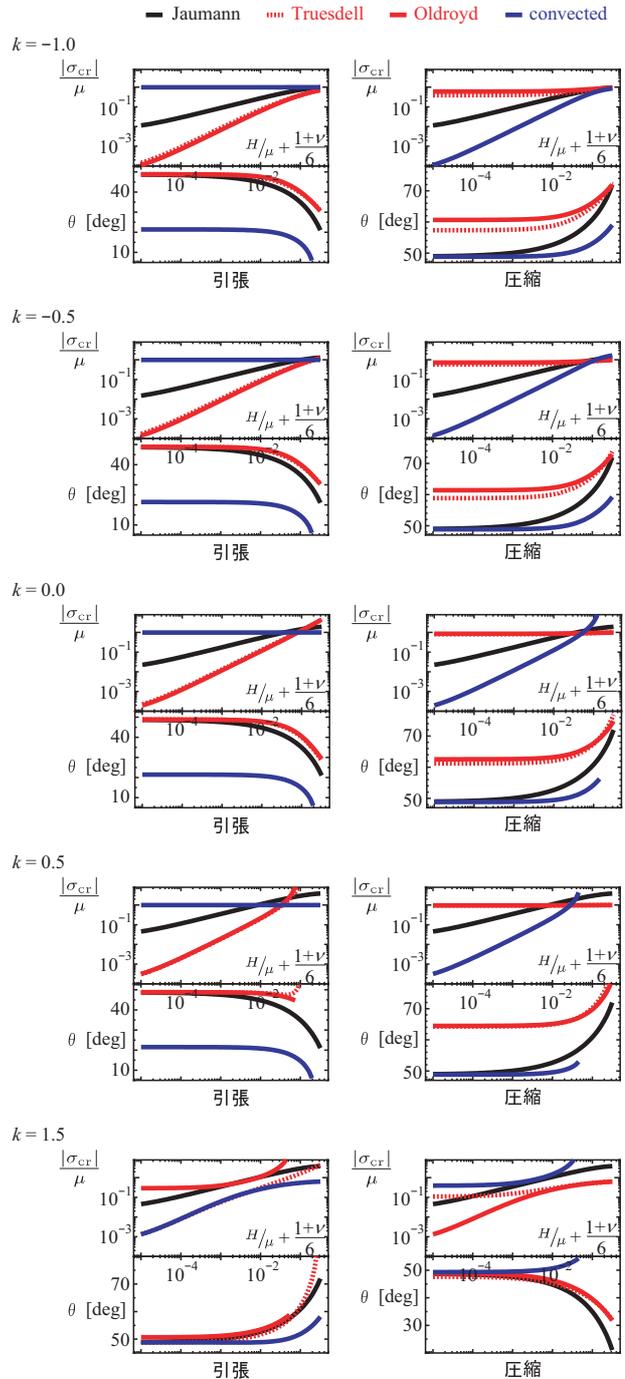


図-3 硬化パラメタの影響 (軸対称応力状態)

H/μ の値が大きい範囲では解が得られないケースが存在するが、これは、任意の θ に対して式 (15) を満足する 2 つの実根 σ_0 が共に同符号となるためである．一方、せん断帯角度の予測に関しては、塑性的平面ひずみの場合ほどそれぞれの結果が接近することはなかった．なお、微小変形の枠組みにおいて Hill⁵⁾ は一軸応力状態における剛塑性体の局所変形を考え $35.3^\circ, 54.7^\circ$ の理論値を得ているが、これは本論文における $k = 0$ かつ $H/\mu = 0$ の場合に相当し、この場合引張の Oldroyd 速度と圧縮の Jaumann 速度がそれぞれ最も近い値になった．

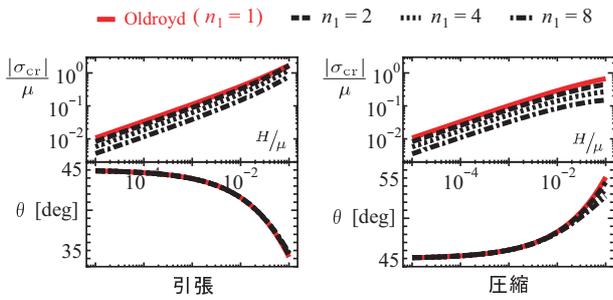


図-4 n_1 の影響 (塑性的平面ひずみ)

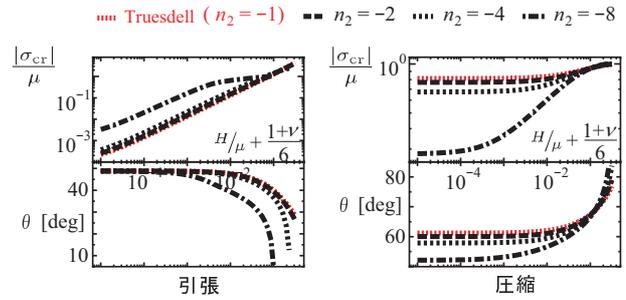


図-6 n_2 の影響 (一軸応力状態)

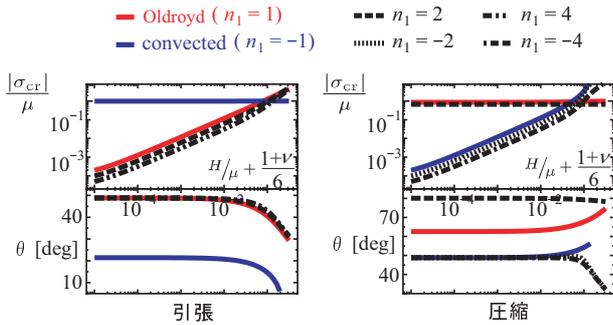


図-5 n_1 の影響 (一軸応力状態)

が比較的大きくなることでせん断剛性を低めていると考えられる。一方、応力レベルが大き過ぎない範囲では n_1 によるせん断帯角度の予測の違いはほとんど無い。また、せん断成分の構成関係には含まれない n_2 が結果に対して影響を及ぼすことから、せん断変形の影響が大きい変形の局所化においても体積変化を考慮する必要が少なからずあると考えられる。

5. おわりに

増分弾塑性構成則を用いた変形の局所化解析により、以下の知見が得られた。

- 塑性的平面ひずみの場合 $H/\mu > 0$ で局所化が発生するためには非零の応力状態である必要があり、 $n_1 > 0$ の応力速度を用いた場合の局所化応力が他と比べて小さくなる傾向を示した。また、せん断帯角度の予測は微小変形の理論値と整合した。
- 軸対称応力状態の場合 $H/\mu > -(1+\nu)/6$ で局所化が発生するためには非零の応力状態である必要があり、 n_1 の符号によって引張あるいは圧縮側で局所化応力が小さくなった。
- n_2 の影響も少なからず存在した。

以上から、客観的応力速度の定式化ではスピンの影響だけでなく材料の伸縮による変化の影響もまた考慮する必要があると結論付けられる。これより、Truesdell 速度や Oldroyd 速度が Jaumann 速度よりも優れていることを示すことができた。

参考文献

- 1) Dienes, J. K.: On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mech.*, Vol.32, pp.217-232, 1979.
- 2) 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979.
- 3) Malvern, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous medium*, Prentice-Hall Inc., 1969.
- 4) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 5) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press, 1998.

(2014年2月5日提出)

(2) 一般化した応力速度を用いた場合

前節の結果から、塑性的平面ひずみの場合は正值の n_1 により良好な結果がもたらされ、軸対称応力状態の場合は引張あるいは圧縮で n_1 の影響が大きく、また n_2 の影響も少なからず存在することが明らかとなった。これより、 n_1 および n_2 の影響を調べる。

a) 塑性的平面ひずみの場合

良好な結果を示した Oldroyd 速度を基準にしたときの n_1 の及ぼす影響を図-4 に示す。これより、 n_1 の値が大きくなるほど局所化応力レベルは小さくなっていく傾向にある。これは、“すべり” に大きく関与するせん断成分の構成関係における接線係数に弾性係数に加え $n_1\sigma_0$ の項が含まれることから、 n_1 の値が大きくなることで剛性が高くなるためであると考えられる。すなわち、材料の伸縮による変化の影響が結果に大きく影響を及ぼすことになる。一方せん断帯角度の予測の違いはほとんど無いが、 n_1 の値が大きくなるほど硬化パラメタに対するせん断帯角度の変化率が若干小さくなる。

b) 軸対称応力状態の場合

良好な結果を示した引張側の Oldroyd 速度と圧縮側の convected 速度を基準にしたときの n_1 の及ぼす影響を図-5 に、Truesdell 速度を基準にしたときの n_2 の及ぼす影響を図-6 に示す。これより、 n_1 の絶対値が大きくなるほど引張側では $n_1 > 0$ 、圧縮側では $n_1 < 0$ の応力速度の場合に予測される応力レベルが小さくなっていく傾向にある。しかし、 n_1 の絶対値が大きくなり過ぎると局所化解が得られなくなるが、これは、等方圧