

# せん断変形を許容する非均質平板の平均物性評価

Evaluation of Averged Mechanical Property of Heterogeneous Plate with Shear Deformation

瀬戸川敦\*

Atsushi SETOGAWA

\*構造強度学研究室（研究指導教員：斉木功 准教授）

合成床版に設けられるずれ止めを，構造物全体を対象とする有限要素解析で陽にモデル化することは計算負荷の観点から現実的ではない．そこで，何らかの平均物性評価が必要となるが，要素試験による方法はずれ止めに作用する荷重が明確でないために困難である．本研究では数値的な物性評価のために，巨視的な変形によるひずみを積分する事で節点間の相対変位を表し，断面の回転を拘束することで変形を与える周期境界条件を定式化した．スタッドを有する合成床版について解析を行い，変形を適切に再現しているか検討を行った．

**Key Words:** 均質化法，合成板，周期境界条件，せん断変形

## 1. はじめに

鋼コンクリート合成床版やサンドイッチパネル等の合成板は力学的に優れた設計を可能にしている<sup>1)</sup>．合成床版の設計にあたっては，鋼とコンクリートの一体化が前提となっており，そのためにずれ止めが設けられる<sup>2)</sup>．このずれ止めは構造物全体に対しては非常に小さいので，構造物全体を対象とする有限要素解析でずれ止めに陽にモデル化する事は計算負荷の観点から現実的ではない．従って，何らかの平均物性評価が必要となる．合成床版の場合，ずれ止めに作用する荷重が明確でないため，要素試験によって平均物性評価を行うことは困難である．そこで，本研究では，均質化理論に基づく合成板の数値的な物性評価を行うための周期境界条件を定式化する．

## 2. 周期的な平板の 2 方向周期境界条件

図-1 に示すような座標系において定義される直交する 2 つの周期ベクトル

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

で表される周期性を有する平板の単位構造を代表体積要素として考える．

有限要素法により，離散化された問題を考える．以下の関係

$$\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^i = \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

を満たす代表体積要素の境界上の節点  $i, d$  のペアについて  $i$  を独立節点， $d$  を従属節点と呼ぶことにする．代表

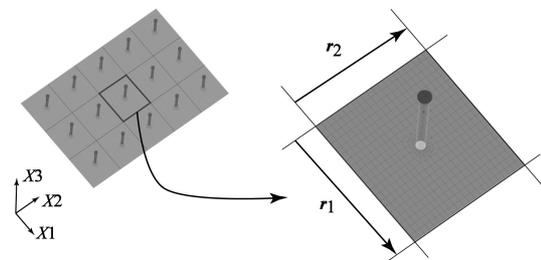


図-1 2 方向周期

体積要素の巨視的な変形に対する，独立節点  $i$  と従属節点  $d$  の間の相対変位  $\hat{\mathbf{u}}$  を

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^d - \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_\epsilon + \mathbf{u}_\phi + \mathbf{u}_\gamma + \mathbf{u}_\varphi \quad (3)$$

と表す．ここで， $\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\gamma, \mathbf{u}_\varphi$  はそれぞれ，巨視的な垂直ひずみ，曲げ，せん断，ねじりによる相対変位であり，各巨視的な変形によるひずみの積分により

$$\mathbf{u}_\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 r_1 \\ \epsilon_2 r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_\phi = \begin{Bmatrix} \phi_2 x_3 r_1 \\ -\phi_1 x_3 r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_\gamma = \begin{Bmatrix} \frac{\gamma_{12}}{2} r_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} r_1 \\ \gamma_{31} r_1 + \gamma_{23} r_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi x_3 r_2 \\ -\varphi x_3 r_1 \\ \varphi x_2 r_1 + \varphi x_1 r_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

となる．ここで， $\epsilon_i$  は  $x_i$  軸ひずみ， $\phi_i$  は  $x_i$  軸周りの曲

率,  $\gamma_{ij}$  は  $x_i$  軸と  $x_j$  軸を含む面のせん断ひずみ,  $\varphi$  は  $x_1x_2$  面ねじり曲率を表す.

周期性を考えると, 対となる独立節点  $i$  と従属節点  $d$  の節点力  $f^i, f^d$  の間には

$$f_k^i + f_k^d = \mathbf{0} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

が成立する.

せん断変形  $\gamma_{23}, \gamma_{13}$  を与える場合, 相対変位に関する周期境界条件のみでは剛体回転が生じ, 代表体積要素は変形しない. そこで, 断面の平均回転を要素の回転としてこの回転を拘束する. 代表体積要素の重心点を原点に置くことで,  $x_2, x_1$  軸にそれぞれ垂直な断面の  $x_1, x_2$  軸まわりの回転に関する拘束条件式はそれぞれ

$$g_1 = \frac{\int x_3 u_2 dV}{r_2 \int (x_3)^2 dA_{31}} = 0, \quad g_2 = \frac{\int x_3 u_1 dV}{r_1 \int (x_3)^2 dA_{32}} = 0 \quad (9)$$

と表される. 基準座標系で定義される 3 次元アイソパラメトリック要素の形状関数  $N^m(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  と変数変換  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$  のヤコビアン  $J$  を用いてこの拘束条件式を離散化すると

$$\bar{g}_1 = \sum w_1^n u_2^n = 0, \quad \bar{g}_2 = \sum w_2^n u_1^n = 0 \quad (10)$$

$$w_i^n = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\sum N^m x_3^m) N^n \det J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{r_j \int (x_3)^2 dx_1 dx_3} \quad (i, j = 1, 2, i \neq j) \quad (11)$$

となる.

剛体回転の拘束条件を含む剛性方程式は, Lagrange 未定乗数法を用いて定義される汎関数

$$\Pi_L = \Pi + \bar{M}_1 \bar{g}_1 + \bar{M}_2 \bar{g}_2 \quad (12)$$

の停留条件から

$$Ku + \bar{M}_1 \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial u} + \bar{M}_2 \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial u} = f \quad (13)$$

となる. ここで,  $\Pi$  は全ポテンシャルエネルギー,  $\bar{M}_i$  は  $x_i$  軸周りの剛体回転の拘束に必要な曲げモーメントに相当する Lagrange 未定乗数,  $\bar{g}_i$  は式 (10) で示した回転であり,  $K$  は通常の剛性行列,  $f$  は節点力ベクトルである.

独立節点  $i$ , 従属節点  $d$ , その他の節点  $f$  について, 元の剛性方程式を

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} & K_{id} \\ K_{fi} & K_{ff} & K_{fd} \\ K_{di} & K_{df} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^f \\ u^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^i \\ f^f \\ f^d \end{bmatrix} \quad (14)$$

とすると, 式 (8),(10),(13) から

$$\begin{bmatrix} K'_{ii} & K'_{if} & K'_{id} & w'^i \\ K_{fi} & K_{ff} & K_{fd} & w^f \\ -I & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ w^i & w^f & w^d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^i \\ u^f \\ u^d \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ f^f \\ \hat{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$w'^i = w^i + w^d, \quad K'_{in} = K_{in} + K_{dn} \quad (n = i, d, f) \quad (16)$$

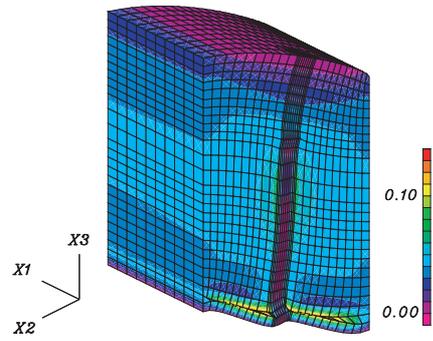


図-2 強制変位によりせん断変形させた場合の変形の様子

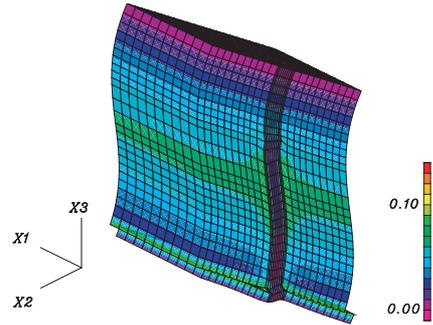


図-3 周期境界条件によりせん断変形させた場合の変形の様子

と表すことができる.

### 3. 解析例

ずれ止めとして頭つきスタッドを有する合成床版をモデル化した. 線形解析であるので, コンクリートと底鋼板の間に軟らかい層を挟みこむことで擬似的にずれを考慮した. これを強制変位によってせん断変形させた場合の断面  $x_1 = 0$  の変形の様子とせん断ひずみ分布を図-2に示す. 上面でも端部のひずみが緩和されず, 中央部のひずみが小さくなっている. また, ずれも生じていない. 一方, 周期境界条件によってせん断変形を与えた場合の断面  $x_1 = 0$  の変形の様子とせん断ひずみ分布を図-3に示す. 上面付近では  $x_1x_2$  平面内でのひずみの変化は無い. また, コンクリートと底鋼板の間に生じるずれも再現されている. 従って, 今回定式化した周期境界条件はせん断変形を適切に再現していると言える.

#### 参考文献

- 1) 街道浩, 松井繁之, 岩田幸三: 鋼・コンクリート合成床版の性能照査型設計法の提案, 土木学会論文集 A, Vol166, No3, pp451-466, 2010.
- 2) (社) 土木学会: 複合構造物の性能照査例, 複合構造シリーズ 01, (社) 土木学会, 2006.

(2012年2月14日提出)