

# 応力速度と変形の局所化に関する基礎的考察

## Fundamental Consideration about Stress Rate and Localization of Deformation

土井恵介\*

Keisuke DOI

\*構造強度学研究室 (指導教員: 岩熊哲夫 教授)

The Jaumann rate of the Cauchy stress is often used to describe the incremental constitutive relations in finite deformation. However, it leads to oscillatory response in simple shear and to relatively high nonlinear resistance in tension. We here introduced several objective stress rates in order to compare their characteristics and applicability. Especially an emphasis is put on eligibility of the consistency condition of the yield condition. Numerical results show that the difference on the load-stretch curves is small between chosen stress rates when the yield condition is reasonably satisfied. Therefore, the Truesdell stress rate, for example, can be used in wide range of strains without any strange predictions of the material responses. Finally, the predicted directions of the localized deformation are compared as an application.

**Key Words :** Stress Rate, Localization, Finite Deformation,

### 1. まえがき

増分型構成則には一般に Cauchy 応力の Jaumann 速度が用いられる。しかし、その選択では単純せん断で正負の応力履歴を示したり、単純引張で比較的早めに非線形性を示す<sup>1)2)</sup>。そこで、それに加えて4つの応力速度を用いて、各速度の特徴と適用範囲を検討し、局所化現象の予測を行う。

### 2. 構成モデル

構成則の例として Prandtl-Reuss モデルを用い、降伏関数を

$$f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y \quad \bar{\sigma} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (1)$$

$$\tau_Y \equiv \tau_{Y0} + H \bar{\epsilon}^p \quad \bar{\epsilon}^p \equiv \int_0^t \sqrt{2 d_{ij}^p d_{ij}^p} dt$$

とした。ここに  $H$  は硬化係数で一定とし、 $d_{ij}^p$  は変形速度の塑性成分で、流れ則

$$d_{ij}^p = \lambda_{PR} \sigma'_{ij} \quad (2)$$

に従うものとする。もし整合条件

$$\dot{f} = 0 \quad (3)$$

が成立する場合には

$$\lambda_{PR} = \frac{1}{4H\bar{\sigma}^2} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (4)$$

となる。 $\dot{\sigma}_{ij}$  は客観性を有する応力速度である。一方、変形速度の弾性成分は増分型の Hooke の法則に従うものとし

$$d_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \quad (5)$$

が成立するものとする。ここに、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $\kappa$  は体積弾性係数、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。また、変形速度には加算則が成立し

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad (6)$$

から、弾塑性接線コンプライアンス  $D^{ep}$  を次式で定義することにする。

$$d = D^{ep} : \dot{\sigma} \quad (7)$$

### 3. 対象とする応力状態

例として図-1のような比例载荷応力状態を対象とする。ここでは、 $S_{21}^N = S_{12}^N = \frac{1}{\sqrt{3}} S_{11}^N$  とした。 $S_{ij}^N$  は nominal 応力である。この場合には Cauchy 応力と nominal 応力は

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} x_{1,1} S_{11}^N + x_{1,2} S_{21}^N & x_{2,1} S_{11}^N + x_{2,2} S_{21}^N & 0 \\ x_{1,1} S_{12}^N & x_{2,1} S_{12}^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

という関係が成り立つ。ここに  $J$  は Jacobian である。この研究では次の4つの応力速度を用い、それぞれを比

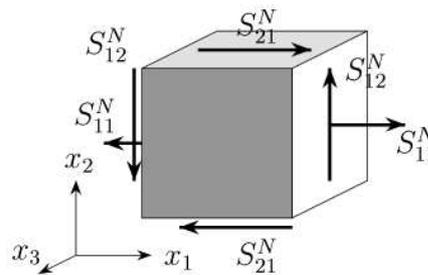


図-1 载荷条件

較する．

$$\text{Jaumann} : \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \quad (9)$$

$$\text{Kirchhoff} : \overset{\nabla^k}{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} + \sigma_{ij}d_{kk} \quad (10)$$

$$\text{Truesdell} : \overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ik} + \sigma_{ij}d_{kk} \quad (11)$$

$$\text{Oldroyd} : \overset{\sqcup}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ik} \quad (12)$$

#### 4. 整合条件を用いた解析

载荷は nominal 応力の増分を与えて行う．式(2) (5)

(6) より，

$$v_{1,1} = \frac{1}{E} \left\{ \overset{\star}{\sigma}_{11} - \nu \overset{\star}{\sigma}_{22} \right\} + \frac{1}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \lambda_{PR} \quad (13)$$

$$v_{2,2} = \frac{1}{E} \left\{ \overset{\star}{\sigma}_{22} - \nu \overset{\star}{\sigma}_{11} \right\} + \frac{1}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \lambda_{PR} \quad (14)$$

$$v_{3,3} = \frac{-\nu}{E} \left\{ \overset{\star}{\sigma}_{11} + \overset{\star}{\sigma}_{22} \right\} - \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \lambda_{PR} \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} (v_{1,2} + v_{2,1}) = \frac{1 + \nu}{E} \overset{\star}{\sigma}_{12} + \sigma_{12} \lambda_{PR} \quad (16)$$

であり，式(8) から  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  という関係と， $S_{12}^N = \alpha S_{11}^N$  を用いると

$$\alpha x_{1,1} = x_{2,1} + \alpha x_{2,2}$$

となるので，両辺を時間微分すると，

$$\alpha v_{1,1} x_{1,1} = v_{2,1} x_{1,1} + \alpha v_{2,2} x_{2,2} \quad (17)$$

のように  $v_{2,1}$  を  $v_{1,1}$ ,  $v_{2,2}$  で表わされる．この式と式(4)を式(13) ~ 式(16) に代入し， $\overset{\star}{\sigma}$  にそれぞれ式(9)から(12)を代入して連立方程式を解くことで， $v_{ij}$  を  $\dot{\sigma}_{ij}$  で以下のように表すことができる．

$$\begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{3,3} \\ v_{1,2} \\ v_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \\ B_{52} & B_{53} & B_{54} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここに  $B_{ij}$  は各応力速度毎に異なる表現になる．

次に，式(8)を両辺時間微分すると，Cauchy 応力増分と nominal 応力増分が

$$\dot{\sigma}_{11} = C_1 \dot{S}_{11}^N + C_2 \dot{S}_{12}^N + C_5 v_{1,1} - \sigma_{11} (v_{2,2} + v_{3,3}) + C_7 v_{1,2} \quad (19)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = C_3 \dot{S}_{12}^N - \sigma_{22} v_{k,k} + C_8 v_{2,1} \quad (20)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = C_4 \dot{S}_{12}^N - \sigma_{12} (v_{2,2} + v_{3,3}) \quad (21)$$

となるので，これを式(18)に代入すると， $v_{i,j}$  と nominal 応力増分との関係が

$$\begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{3,3} \\ v_{1,2} \\ v_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{12} & D_{13} \\ D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \\ D_{42} & D_{43} \\ D_{52} & D_{53} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{S}_{11}^N \\ \dot{S}_{12}^N \end{Bmatrix} \quad (22)$$

表-1 载荷パターン

	Start	Intermediate	Final
prop	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{start}}$	—	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{final}}$
t2s	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{start}}$	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{start}}$ , $(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{final}}$	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{final}}$
s2t	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{start}}$	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{final}}$ , $(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{start}}$	$(S_{11}^N, S_{12}^N)_{\text{final}}$

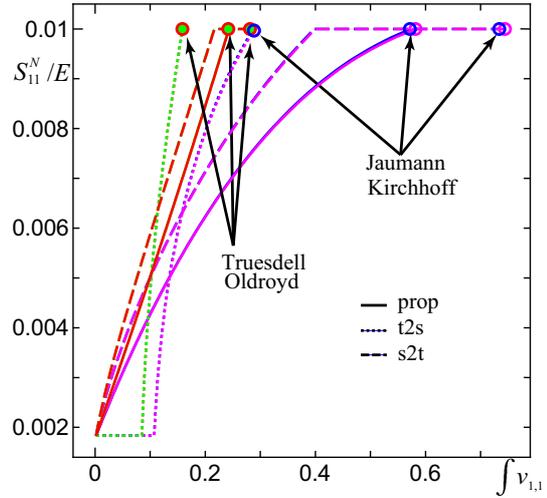


図-2 整合条件を用いた解析による応答

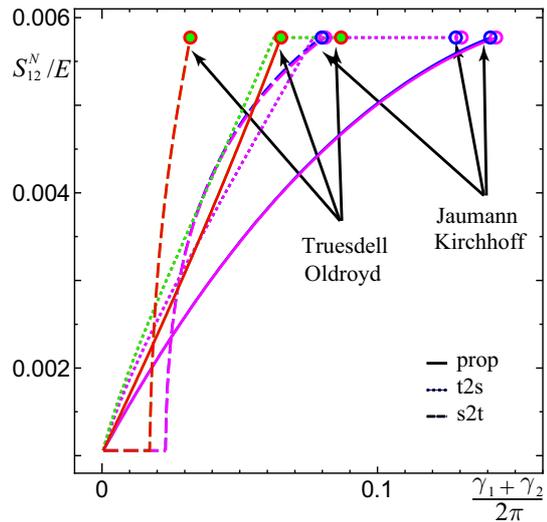


図-3 整合条件を用いた解析による応答

のように得られる． $D_{ij}$  も各応力速度毎に異なる表現になる．

整合条件を用いた解析の载荷パターンは表-1に示したような'prop'，'t2s'，'s2t'の3種類とする．つまり，比例载荷のまま(prop)の場合と，降伏後に  $S_{11}^N$  あるいは  $S_{12}^N$  のいずれかを先行させたか(t2s か s2t)の場合である．まず，比例载荷で最終応力を  $S_{11}^N, \text{final} = E/100$  として，初期降伏から  $N = 10^{10}$  の増分ステップで载荷した．そこで得られた  $S_{12}^N, \text{final}$  を用い，t2s あるいは s2t の2段階载荷パターンを  $10^{10}$  ステップの2段階で与えることにした．普通鋼を念頭に置いて， $E = 200\text{GPa}$ ， $\nu = 1/3$ ， $H = E/100$  で  $\tau_Y = 300\text{MPa}$  のときの結果を図-2, 3に示した．縦軸は nominal 応力  $S_{11}^N$ ，または  $S_{12}^N$

を Young 率で除したもので横軸は  $\int v_{1,1}$  とせん断ひずみである。

式 (9) ~ (12) から明らかなように, Jaumann 速度と Kirchhoff 速度, Truesdell 速度と Oldroyd 速度は体積変形成分のみの差しかないので, 図-2 でも Jaumann 速度と Kirchhoff 速度はそれぞれ, Truesdell 速度と Oldroyd 速度もそれぞれ類似した挙動を示している. 一方, 例えば比例荷重で Truesdell 速度の最終伸びは Jaumann 速度の 2 倍にも達している. その原因を調べるために降伏条件がどの程度誤差を含むかを調べたのが図-4 である. Truesdell 速度や Oldroyd 速度を用いた場合は  $\bar{\epsilon}^p$  が 10 % を超えるとほぼ降伏条件を満たしていない. これは整合条件で無視した増分の 2 次項の影響が Truesdell 速度や Oldroyd 速度の場合には比較的大きいからである. つまり式 (3) のような整合条件の考え方には限界があることを示している.

## 5. 整合条件を用いない数値解析

そこで  $f = 0$  を非線形項も含めて成立させた場合を考えることにした. Cauchy 応力の更新は, その物質微分の加算でいいので, このとき降伏条件の 1 回の増分前後の表現は

$$f_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 - \tau_{Y0} - H\bar{\epsilon}^p}$$

$$f_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11} + \dot{\sigma}_{11})^2 + \dots + 3(\sigma_{12} + \dot{\sigma}_{12})^2 - \tau_{Y0} - H(\bar{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^p)}$$

である. これに式 ( $\dot{\epsilon}^p = 2\bar{\sigma}\lambda_{PR}$ ) を代入し, 増分後の降伏条件を満足させるためには

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)(1 + 2H\lambda_{PR})^2 \\ & = (\sigma_{11} + \dot{\sigma}_{11})^2 + (\sigma_{22} + \dot{\sigma}_{22})^2 \\ & \quad - (\sigma_{11} + \dot{\sigma}_{11})(\sigma_{22} + \dot{\sigma}_{22}) + 3(\sigma_{12} + \dot{\sigma}_{12})^2 \end{aligned} \quad (23)$$

という関係を成立させればよい. 整合条件を用いた解析と同様の手順を踏むが, 式 (18) とは異なり  $v_{i,j}$  が

$$\begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{3,3} \\ v_{1,2} \\ v_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{PR} \\ \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

のように導かれ, 式 (19) ~ (21) を代入すると,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{PR} \\ \dot{S}_{11}^N \\ \dot{S}_{12}^N \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,2} \\ v_{3,3} \\ v_{1,2} \\ v_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{PR} \\ \dot{S}_{11}^N \\ \dot{S}_{12}^N \end{Bmatrix} \quad (26)$$

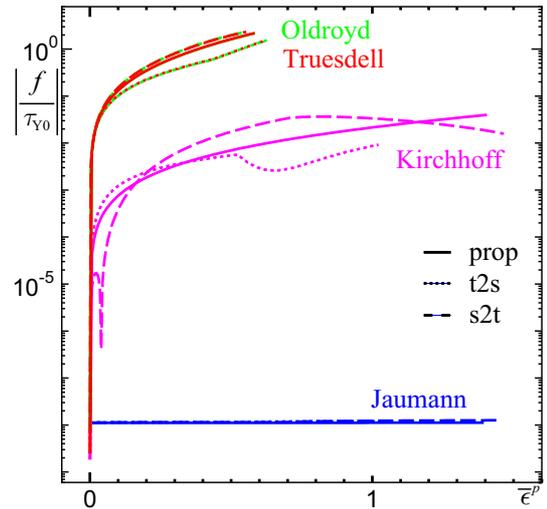


図-4 整合条件を用いた解析における降伏条件の相対誤差

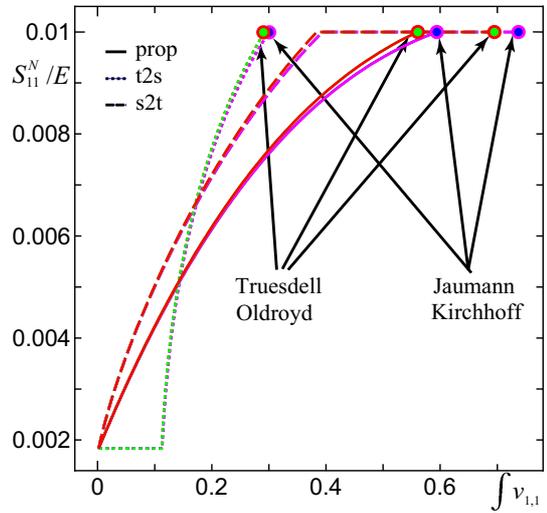


図-5 整合条件を用いない解析での応答

という関係を得る. 式 (25) を式 (23) へ代入すると,  $\lambda_{PR}$  に対する 2 次方程式が

$$\tilde{f}(\lambda_{PR}) = a\lambda_{PR}^2 + b\lambda_{PR} + c \quad (27)$$

のように得られるので, これを増分ごとに解けば, 整合条件を用いることなく, 厳密に降伏条件を満足させた解析ができる.

図-2, 3 と同じ解析をしたのが図-5, 6 である. Jaumann 速度と Kirchhoff 速度, Truesdell 速度と Oldroyd 速度とは伸びの相対誤差がそれぞれ  $10^{-3}$  以下であり, 図では判別できないくらいの差しか生じていない近い応答を示した. また, Jaumann 速度に対する Truesdell 速度の伸びの相対誤差は約 6 % ('prop', 's2t') と約 3 % ('t2s') であり, 整合条件を用いた解析の結果と比べて差がほとんど無い. 図-7 には降伏条件のせん断降伏応力に対する相対誤差を描いたが, すべての応力速度の選択, すべての荷重パターンにおいて降伏条件を満足していた. このことから, 少なくともこのような解析では

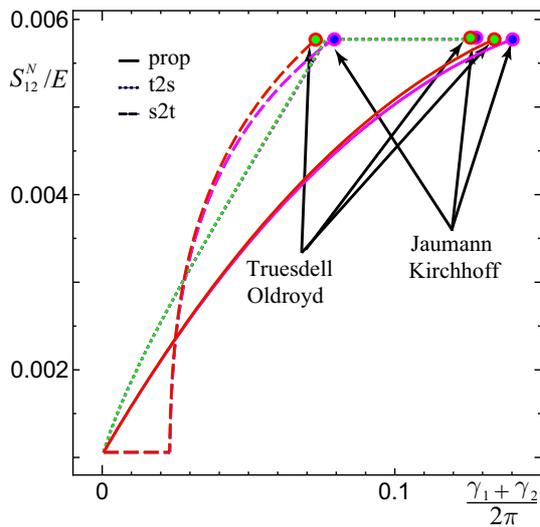


図-6 整合条件を用いない解析での応答

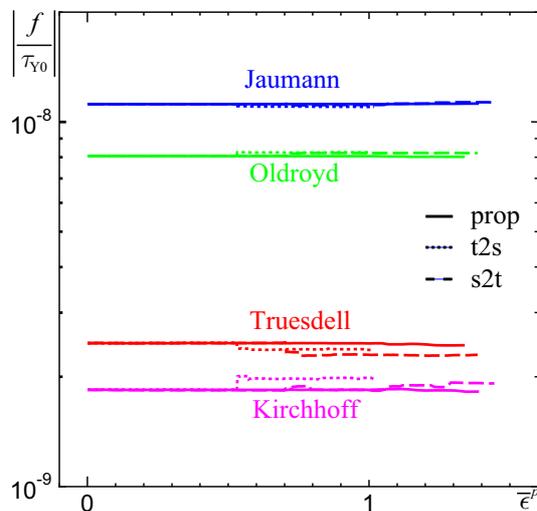


図-7 整合条件を用いない解析における降伏条件の相対誤差

応力速度の選択による違いは現れないことがわかる。一方、より小さいひずみレベルで整合条件を用いた時、Jaumann 速度は変になるのに Truesdell 速度はうまくいくのだから Truesdell 速度を使用する方が良いと考えられる。

## 6. 変形の局所化

応力速度の選択の違いを見るために、変形の局所化によって発生するすべり線の角度を求める。古典的すべり線理論と同様、せん断帯のような局所変形はその局所面において膨張が生じないまません断変形が生じようとしているので、載荷軸方向とすべり線の方向のなす角度  $\theta$  とすると、その面におけるダイラタンシーが無い条件は

$$\cos^2 \theta d_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta d_{12} + \sin^2 \theta d_{22} = 0 \quad (28)$$

$$\sin^2 \theta d_{11} - 2 \sin \theta \cos \theta d_{12} + \cos^2 \theta d_{22} = 0 \quad (29)$$

という関係<sup>3)</sup>で表わされる。整合条件を用いない解析で求められた変形速度をこの式に代入し  $\theta$  を求めたのが

表-2 すべり線の角度

	Jaumann			Truesdell		
	prop	t2s	s2t	prop	t2s	s2t
$\theta_1$	-28.36	-30.10	-25.63	-28.22	-30.00	-25.56
$\theta_2$	79.58	76.72	82.07	79.20	76.45	81.62
$\theta_3$	61.64	59.90	64.37	61.78	60.00	64.44
$\theta_4$	-10.42	-13.28	-7.93	-10.80	-13.55	-8.38

表-2である。表を見ると、図-5の荷重変位関係と同様に2つの速度間で類似した結果となった。

## 7. おわりに

構成則に用いる応力速度によって巨視的な荷重 - 変位関係が異なることが確かめられ、Jaumann 速度と Kirchhoff 速度を用いると、Truesdell 速度、Oldroyd 速度に比べて大きな変形を示すことがわかった。その結果、整合条件の使い方に問題があり、整合条件を用いない解析では Truesdell 速度は Jaumann 速度と似たような応答を示し、差がないことがわかった。整合条件が使える比較的小さな変形では Jaumann 速度は変な応答になる。それなら、Truesdell 速度の方が使い勝手が良いと考えられる。

## 参考文献

- 1) Lee, E. H., Mallett, R. L. and Wertheimer, T. B.: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.50, pp.554-560, 1983.
- 2) 小林寿彦, 齊木功, 岩熊哲夫: 構成則に用いる応力速度と変形の局所化, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.14, pp.I\_281-I\_291, 2011.
- 3) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press, 1998.

(2012年2月8日提出)