ダイヤモンドパターンの対称性を持つ系の分岐に関する考察

Group-Theoretic Bifurcation Mechanism of Diamond Pattern Equivariant Systems

中村 理浩*
Masahiro NAKAMURA

*構造強度学研究室（研究指導教員：斉木 功　准教授）

The symmetry of the bifurcate solutions of a diamond pattern has been clarified. A two-dimensional diamond pattern $\mathrm{DI}_{n,\tilde{n}}$ consists of intersections of $n \times \tilde{n}$ identical diamond-shaped blocks which periodically extend infinitely in the plane, and therefore have discrete translational symmetry and reflectional symmetry. The $\mathrm{DI}_{n,\tilde{n}}$ emerges after the first bifurcation from the uniform rectangular domain. However, no bifurcation modes from this pattern have yet to be found. In this paper, we will explain the group-theoretic bifurcation mechanism of a $\mathrm{DI}_{2,2}$ system.

Key Words : *group-theoretic bifurcation theory, diamond pattern, pattern formation*

1. はじめに

岩盤や地盤の領域は，ある要素が周期的に無限に続くと近似できることがある．このように近似した均質な長方形領域の 1 次分岐のパターンとしてストライプパターン，ダイヤモンドモンドパターン ($\mathrm{DI}_{n,\tilde{n}}$) が現れることが示されている[1),2)]．ストライプパターンの 1 次分岐としてエチェロンモードが現れることが解明されている一方で，ダイヤモンドパターンの分岐については解明されていない．本論文ではダイヤモンドパターンの対称性を持つ領域の分岐の仕組みを明らかにすることを目的として文献[3)]に明記されている手法を適用し，同パターンの幾何学的対称性を記述する群の構造を調べ，分岐解の対称性を求めた．

2. ダイヤモンドパターンの対称性を表す群の構造

以下，簡単のため $n = 2$，$\tilde{n} = 2$ として $\mathrm{DI}_{2,2}$ をモデル化する．従来 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の代表体積要素には**図–1-a** が選択されてきたが，基本周期ベクトルと並進ベクトルの方向を一致させるために**図–1-b** を代表体積要素に選択する．$\mathrm{DI}_{2,2}$ の持つ対称性は有限群

$$\mathrm{DI}_{2,2} = \langle p_1, p_2, \sigma, \tilde{\sigma} \rangle \tag{1}$$

で記述される．ここに，p_1 は $(\xi, \tilde{\xi}) = (1/4, 1/4)$ の並進変換，p_2 は $(-1/2,\ 0)$ の並進変換，σ は ξ 軸に関する鏡映変換，$\tilde{\sigma}$ は $\tilde{\xi}$ 軸に関する鏡映変換，$\langle \bullet \rangle$ は括弧内の元で生成される群をそれぞれ表す．生成元の基本関係式

$$\begin{aligned} &p_1^4 = p_2^2 = \sigma^2 = \tilde{\sigma}^2 = e, \\ &p_1 p_2 = p_2 p_1,\ \ p_1\sigma = \sigma(p_1 p_2)^{-1},\ \ p_2\sigma = \sigma p_2, \\ &p_1\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} p_1 p_2,\ \ p_2\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} p_2,\ \ \sigma\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

から群 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の元を共役類[1]で類別し，指標の第 1 種直交性[2]を用いると，式 (4)，(5) のように群 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の 1 次および 2 次既約表現を得る (ただし，複号任意である．)．ここに，e は単位元である．

$$\begin{aligned} &T^{(+,\pm,\pm)}(p_1) = 1,\ \ T^{(-,\pm,\pm)}(p_1) = -1, \\ &T^{(\pm,\pm,\pm)}(p_2) = 1, \\ &T^{(\pm,+,\pm)}(\sigma) = 1,\ \ T^{(\pm,-,\pm)}(\sigma) = -1, \\ &T^{(\pm,\pm,+)}(\tilde{\sigma}) = 1,\ \ T^{(\pm,\pm,-)}(\tilde{\sigma}) = -1 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &T^{(2,1)}(p_1) = T^{(2,2)}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &T^{(2,j)}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ j = 3, 4, 5, 6, \\ &T^{(2,k)}(p_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ k = 1, 2, 3, 5, 6, \\ &T^{(2,4)}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &T^{(2,1)}(\sigma) = T^{(2,2)}(\sigma) = T^{(2,2)}(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &T^{(2,1)}(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T^{(2,3)}(\sigma) = T^{(2,4)}(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &T^{(2,5)}(\sigma) = T^{(2,6)}(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &T^{(2,3)}(\tilde{\sigma}) = T^{(2,4)}(\sigma) = T^{(2,5)}(\tilde{\sigma}) = T^{(2,6)}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

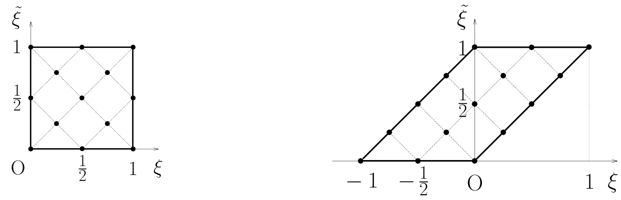
---

1 任意の群 $\mathcal{G}$ の元 A を同じ群の元 G によって変形した GAG^{-1} の形の元の集合を共役類と呼ぶ.

2 指標の第 1 種直交性は次式を指す.

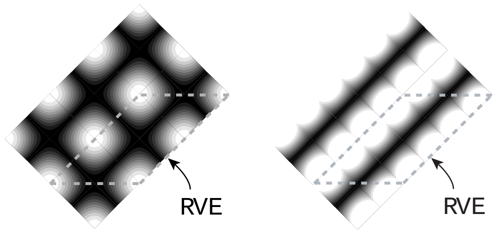
$$\sum_G \chi^{(\alpha)}(G)^* \chi^{(\beta)}(G) = g\delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

ここに，$\chi^{(\alpha)}(G)$，$\chi^{(\beta)}(G)$ は既約表現 $T^{(\alpha)}(G)$，$T^{(\beta)}(G)$ の指標，$\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタであり．左辺の和は g 個の群元すべてにわたる.



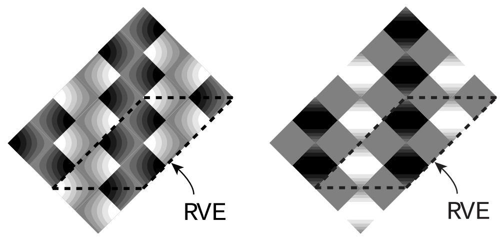
図–1-a **図–1-b**

図–1 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の代表体積要素 (RVE)



図–2-a モード I, $w_2 = 0$ **図–2-b** モード II

図–2 既約表現 $(2, 1)$ に対応する分岐解の対称性



図–3-a モード I, $w_2 = 0$ **図–3-b** モード II

図–3 既約表現 $(2, 3)$ に対応する分岐解の対称性

3. ダイヤモンドパターンの対称性を持つ系の分岐パターン

$\mathrm{DI}_{2,2}$ の 2 重分岐点における自由度を実数 w_1, w_2 として分岐方程式を次式で定義する.

$$F_1(w_1, w_2, \tilde{f}) = 0, \quad F_2(w_1, w_2, \tilde{f}) = 0 \tag{6}$$

ここに, $\tilde{f}$ は着目する特異点からの荷重パラメータ f の増分である. 2 章で求めた既約表現 (5) を用いた同変条件式

$$T(g)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f) = \boldsymbol{F}(T(g)\boldsymbol{u}, f) \tag{7}$$

と特異点における F_1, F_2 の極値条件を分岐方程式 (6) に課すと, 既約表現 $(2, 4)$ に対応する解は存在せず, 残りの 2 次既約表現に対応する解は

(i) $w_1 = w_2 = 0$ 自明解, すなわち基本経路.

(ii) $(w_1 \neq 0, w_2 = 0)$ または $(w_1 = 0, w_2 \neq 0)$
以下, モード I の解と呼ぶ.

(iii) $w_1 = w_2 \neq 0$ 以下, モード II の解と呼ぶ.

の 3 通りに場合分けされることがわかる. 分岐解の対称性は次式より求める.

$$T(g)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \tag{8}$$

ここに, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ であり, $\boldsymbol{w}$ は分岐の自由度, n は分岐点の多重度を表す. **表–1** に群 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の分岐点の分類と分岐解の対称性を記述する群を示した. また, **図–2**, **図–3** にそれぞれ既約表現 $(2, 1)$, $(2, 3)$ に対応する分岐解の対称性を示した.

表–1 群 $\mathrm{DI}_{2,2}$ の分岐点の分類と分岐解の対称性

既約表現		分岐解の対称性
$(+, +, +)$		$\langle p_1, p_2, \sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
$(+, +, -)$		$\langle p_1, p_2, \sigma \rangle$
$(+, -, +)$		$\langle p_1, p_2, \tilde{\sigma} \rangle$
$(+, -, -)$		$\langle p_1, p_2, \sigma\tilde{\sigma} \rangle$
$(-, +, +)$		$\langle p_1^2, p_2, \sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
$(-, +, -)$		$\langle p_1^2, p_2, \sigma, p_1\tilde{\sigma} \rangle$
$(-, -, +)$		$\langle p_1^2, p_2, p_1\sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
$(-, -, -)$		$\langle p_1^2, p_2, p_1\sigma, p_1\tilde{\sigma} \rangle$
$(2, 1)$	モード I	$\langle p_1^2, \sigma, p_2\tilde{\sigma} \rangle, \langle p_1^2, p_2\sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
	モード II	$\langle p_1, p_2\sigma\tilde{\sigma} \rangle$
$(2, 2)$	モード I	$\langle p_1^2, \sigma, \tilde{\sigma} \rangle, \langle p_1^2, p_2\sigma, p_2\tilde{\sigma} \rangle$
	モード II	$\langle p_1, \sigma\tilde{\sigma} \rangle$
$(2, 3)$	モード I	$\langle p_1^2 p_2, \sigma, p_1p_2\tilde{\sigma} \rangle, \langle p_1^2 p_2, \sigma, p_1\tilde{\sigma} \rangle$
	モード II	$\langle p_1^2 p_2, \sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
$(2, 5)$	モード I	$\langle p_1^2 p_2, p_2\sigma, p_1^3\tilde{\sigma} \rangle, \langle p_1^2 p_2, p_2\sigma, p_1\tilde{\sigma} \rangle$
	モード II	$\langle p_1^2 p_2, p_2\sigma, \tilde{\sigma} \rangle$
$(2, 6)$	モード I	$\langle p_1^2 p_2, p_1p_2\sigma, p_2\tilde{\sigma} \rangle, \langle p_1^2 p_2, p_1\sigma, p_2\tilde{\sigma} \rangle$
	モード II	$\langle p_1^2 p_2, \sigma, p_2\tilde{\sigma} \rangle$

参考文献

1) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials — Engineering Use of Group-Theoretic Bifurcation Theory*, Springer, 2002.
2) Tanaka, R., Saiki, I., and Ikeda, K.: Group-theoretic bifurcation mechanism for pattern formation in three-dimensional uniform materials, *Int. J. Bifurcation and chaos* vol. 12, 2767-2797, 2002
3) Saiki, I., Ikeda, K. and Murota, K.: Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism, *Int. J. Bifurcation and chaos* vol. 15, 497-515, 2005.

(2011 年 2 月 10 日 提出)