構成則に用いる応力速度の選択が変形局所化条件に及ぼす影響

Effects of the two different rate constitutive relations on localization of deformation

小林寿彦*
Toshihiko KOBAYASHI

*構造強度学研究室（指導教員：岩熊哲夫　教授）

材料不安定についてはいくつかの規準があるが，平面問題として解析されたり，応力速度に Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて引張試験片の局所化の評価がされることが多い．そこで，３次元問題も含め，構成則に用いる応力速度に Jaumann 速度と Truesdell 速度を用いた場合等の，引張試験片の局所化に及ぼす影響を求めた．

Key Words : *localization of deformation, Jaumann rate, Truesdell rate*

1.　はじめに

本研究では，Cauchy 応力の Jaumann 速度と Truesdell 速度を用いた構成則を比べながら，変形の局所化解析を行う．構成モデルには非共軸性を含んだ非関連流れ則を用いることにする．

2.　構成則

Cauchy 応力の Jaumann 速度と Truesdell 速度は，それぞれ，

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\,\sigma_{kj} - w_{jk}\,\sigma_{ki} \tag{1}$$

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k}\,\sigma_{ij} - v_{i,k}\,\sigma_{kj} - v_{j,k}\,\sigma_{ik} \tag{2}$$

と定義される．そこで，本研究では，

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \quad C^{ep}_{ijkl} d_{kl}, \quad \overset{\vee}{\sigma}_{ij} = C^{ep}_{ijkl} d_{kl} \tag{3}$$

の 2 種類のモデルを比較する．次の節で用いる局所化条件には

$$\dot{n}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k}\,\sigma_{ij} - v_{i,k}\,\sigma_{kj} \tag{4}$$

で定義される nominal 応力を用いるため式 (1)-(4) から

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl}\,v_{k,l} \tag{5}$$

と表すことができるので，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{C}^{ep}$ 等で定義できる．

3.　構成モデル

変形テンソルの弾性部分は，Hooke の法則に従うものとし，塑性部分には岩盤など降伏曲面に角点を含んだ材料も近似的に表現できるよう非共軸項を加え，

$$d^p_{ij} = \frac{1}{H}\left\{\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta\delta_{ij}\right\}\left\{\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha\delta_{kl}\right\}\dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2h_1}\left(\dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl}\right) \tag{6}$$

とする．ここで，内部摩擦係数 α，ダイレタンシーを表す β，硬化係数 H は，それぞれ

$$\alpha \equiv -\frac{\partial F}{\partial I}, \quad \beta \equiv \frac{\partial G}{\partial I}, \quad H \equiv 3\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \Delta^p}\beta + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \tag{7}$$

と定義し，ρ_0 と ρ はそれぞれ，変形前後の材料の密度，Δ^p・$\bar{\epsilon}^p$ は塑性変形による体積変化と累積塑性ひずみである．また，I を応力の第一不変量とし，降伏関数 f，塑性ポテンシャル g を，

$$f \equiv \bar{\sigma} - F(I, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p), \quad g \equiv \bar{\sigma} + G(I) \tag{8}$$

と定義した．h_1 は非共軸性を表す材料パラメータであり，H が弾塑性の接線的な硬化係数であるのに対比させて，その割線係数として解釈されることもある．

4.　有限変形理論の枠組における局所化条件

Hill や Hutchnson[1)]が用いているように速度勾配に次式のような不連続がある場合を想定する．このとき，内部のすべり面において，

$$\langle \dot{n}_{ij} \rangle \nu_i = 0, \quad \langle v_{k,l} \rangle = g_k \nu_l \tag{9}$$

と表される連続条件が成立しなければならない．そこで，式 (5) を式 (9) に代入すると，結局，

$$\left(\nu_i\,F_{ijkl}\,\nu_l\right) g_k = 0 \quad \rightarrow \quad \det\left|\nu_i\,F_{ijkl}\,\nu_l\right| = 0 \tag{10}$$

がすべり線の存在条件となる．

5.　解析結果と考察

表 1 には，平面ひずみ状態で Jaumann 速度と Truesdell 速度を用いた，共軸モデルと $\bar{\mu}/\mu = 0.01$ とした非共軸モデルを用い，各 α と β に対する結果を示した．例えばマレージング鋼の平面ひずみでの圧縮状態における

表–1 平面ひずみ状態での共軸モデルと非共軸モデルにおける材料パラメータの影響

$\bar{\mu}/\mu$	α	β	Jaumann 速度				Truesdell 速度	
			$\lvert\theta\rvert$(度)		σ_0/μ		$\lvert\theta\rvert$(度)	σ_0/μ
			引張	圧縮	引張	圧縮		
1.0	0.0	0.0	43.7	46.3	1.83×10^{-1}	1.83×10^{-1}	45.0	-3.00×10^{-3}
		0.0033	43.7	46.4	2.00×10^{-1}	1.67×10^{-1}	45.2	-2.95×10^{-3}
		0.033	44.1	46	3.54×10^{-1}	1.21×10^{-1}	46.6	-3.56×10^{-4}
	0.033	0.0	46.1	48.8	1.19×10^{-2}	3.52×10^{-1}	46.3	-3.57×10^{-4}
		0.0033	46.3	48.8	2.93×10^{-2}	3.36×10^{-1}	46.4	-8.33×10^{-4}
		0.033	46.4	49.1	1.85×10^{-1}	1.85×10^{-1}	47.9	-2.73×10^{-3}
0.01	0.0	0.0	32.6	57.4	1.43×10^{-2}	1.43×10^{-2}	47.5	-2.87×10^{-3}
		0.0033	32.6	57.4	1.44×10^{-2}	1.42×10^{-2}	47.5	-2.86×10^{-3}
		0.033	31.9	57.1	1.56×10^{-2}	1.28×10^{-2}	48.6	-2.71×10^{-3}
	0.033	0.0	35.6	60.7	1.28×10^{-2}	1.56×10^{-2}	48.6	-2.71×10^{-3}
		0.0033	35.6	60.5	1.30×10^{-2}	1.55×10^{-2}	48.8	-2.71×10^{-3}
		0.033	35.1	60.1	1.44×10^{-2}	1.44×10^{-2}	50.0	-2.64×10^{-3}

表–2 3 次元状態での共軸モデルと非共軸モデルにおける材料パラメータの影響

$\bar{\mu}/\mu$	α	β	Jaumann 速度				Truesdell 速度	
			$\lvert\theta\rvert$(度)		σ_0/μ		$\lvert\theta\rvert$(度)	σ_0/μ
			引張	圧縮	引張	圧縮		
1.0	0.0	0.0	27.2	67.1	1.82	1.82	52.4	-3.81×10^{-1}
		0.0033	27.2	66.8	1.82	1.81	53.1	-3.37×10^{-1}
		0.033	27.2	65.2	1.84	1.71	53.1	-3.37×10^{-1}
	0.033	0.0	31.1	68.6	1.71	1.84	53.1	-3.37×10^{-1}
		0.0033	31.1	68.4	1.71	1.84	53.1	-3.32×10^{-1}
		0.033	31.3	66.8	1.75	1.75	53.8	-2.98×10^{-1}
0.01	0.0	0.0	27.4	63.2	1.74×10^{-1}	1.74×10^{-1}	50.0	-4.73×10^{-2}
		0.0033	27.4	63.0	1.75×10^{-1}	1.73×10^{-1}	50.0	-4.68×10^{-2}
		0.033	27.5	61.2	1.78×10^{-1}	1.59×10^{-1}	50.6	-4.19×10^{-2}
	0.033	0.0	31.5	65.0	1.59×10^{-1}	1.78×10^{-1}	52.0	-2.87×10^{-2}
		0.0033	31.5	64.8	1.60×10^{-1}	1.77×10^{-1}	53.1	-2.68×10^{-2}
		0.033	31.7	63.2	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	55.3	-2.11×10^{-2}

すべり線角度は 55 度という報告[2)]があるが，今回設定した材料での共軸モデルで，$\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ においては，どちらの速度でもその角度は求められなかった．しかし，非共軸項によってこの角度は大きくなり実験値に近づく．また，地盤材料の平面ひずみ圧縮試験では，$\theta < 45$ 度がよく観察されるが，それとも逆の性質を示してしまった．

表 2 には，3 次元状態で Jaumann 速度と Truesdell 速度を用い，共軸モデルと $\bar{\mu}/\mu = 0.01$ とした非共軸モデルを用いた場合に，各 α と β に対する結果を示した．共軸で $\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ の場合の結果は，古典的すべり線理論による剛塑性体の 35 度と 55 度に近い．特に Truesdell 速度の場合が整合する．α の影響はすべり角を大きくするが，β については Jaumann 速度では角度を小さく，Truesdell 速度では α と同じ傾向をもつという結果になった．また，すべり始める応力レベルは，やはり Jaumann 速度では非現実的に大きすぎるレベルしか予測しないのに対し，Truesdell 速度は比較的よいレベルを予測している．地盤材料の 3 軸圧縮試験を 3 次元状態ととらえると，種々の角度の θ が現れることとは，この結果はやや整合している．

6. まとめ

構成則に Jaumann 速度の代わりに Truesdell 速度を用いるだけで，すべり線角度も大きく変わり，応力レベルが現実的になることが明らかになった．ただしそのとき，この分岐規準では圧縮のみしか予測できないという結果になった．

参考文献

1) Hill, R. and Hutchison, J. W. : Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
2) Anand, L. and Spitzig, W. A.: Initiation of localized shear bands in plane strain, *J. Mech. Phys. Solids*,Vol. 28, pp.113-128, 1980.

(2011 年 2 月 10 日 提出)