

# 損傷の発展則を組み込んだ平均化手法を用いた弾塑性有限要素解析

Elasto-plastic finite element homogenization analysis with an evolution law of micro damages

黒木 誠一郎\*  
Seiichiro KUROKI

\*構造強度学研究室 (指導教官: 岩熊哲夫 教授)

When materials deform, damages accumulate. A theory, 'called void damage theory', where damages are replaced with voids can express degradation of stiffness. However most models by the void damage theory neglect stiffness of particles which exist in materials and are one cause of damage. Since debonding along such particles creates new damage, it might be important to take into account the stiffness of the particles. In this study, the stiffness of particles or inclusions are considered by an averaging method, and the results are compared with experimental data to show eligibility of our model.

**Key Words** : void damage theory, degradation of stiffness, averaging method

## 1. まえがき

材料が変形を受けると、材料内部に損傷が蓄積していき、材料全体の剛性が低下する。このような剛性低下をモデル化した理論にポイド損傷理論がある。ポイド損傷理論において、損傷は材料内部に存在する不純物や介在物のような粒子と母材の界面剥離によって発生するものとされている。しかし、ポイド損傷理論に基づく既往の研究では、このポイドの発生源である粒子を物理的なものとしてではなく、単なる初期損傷パラメータとして扱っている。一方実験に基づく研究では、材料中のポイドの発生は粒子と母材の界面剥離によるものだと指摘している。そのため、剛性を持たない単なる損傷パラメータとして発生源粒子を扱うのは不適切だと考えられる。

そこで本研究では、既往の研究であまり考慮されていなかった粒子の剛性を考慮するために、森・田中の平均場理論と Eshelby の等価介在物法に基づく平均化手法を用いて、損傷が蓄積していく材料全体の平均剛性を求める。また、ポイドも最初から存在するので、粒子と母材だけではなく、ポイドも含めて平均化を行う。これによって、損傷の進展に伴う弾性剛性の低下をより正確に表現できるので、その影響について数値解析解と実験結果を比較することによって、本手法の有用性を検討する。

## 2. 弾性剛性の低下を組み込んだ構成モデル

ポイド損傷理論で用いられる弾性係数テンソル  $\bar{C}_{ijkl}^e$  は、Hooke の法則と形式上同じであるが、損傷が蓄積している材料全体の平均体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  と平均せん断弾性係数  $\bar{\mu}$  が用いられている点で異なっている。本研究

では、損傷が蓄積している材料を母材と球形介在物 (粒子) および剛性ゼロの球形介在物 (ポイド) の 3 相複合材料と捉える。例えば、森・田中理論を用いたとすると、平均体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  は、

$$\bar{\kappa} = \kappa_M \left[ 1 - \frac{\zeta f_2 + (1 - \chi)(\kappa_M - \kappa_1) f_1}{\zeta \{(1 - \chi)(1 - f_1) + \chi f_2\} + (1 - \chi) f_1 \kappa_M} \right] \quad (1)$$

となる。ここに、 $\kappa_M, \mu_M, \nu_M$  は母材の体積弾性係数、せん断弾性係数、ポアソン比であり、 $\kappa_1, \mu_1, f_1$  は粒子の体積弾性係数、せん断弾性係数、体積比率、そして  $f_2$  はポイド体積分率である。 $\zeta$  は

$$\zeta \equiv \kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\chi \quad (2)$$

と定義した。また、 $\chi$  と  $\phi$  はそれぞれ

$$\chi \equiv \frac{1 + \nu_M}{3(1 - \nu_M)}, \quad \psi \equiv \frac{2(4 - 5\nu_M)}{15(1 - \nu_M)} \quad (3)$$

と定義されている。 $\bar{\mu}$  は式 (1) で、 $\chi$  を  $\psi$  に、そして  $\kappa_M$  を  $\mu_M$  と書き換えることで得られる。

降伏関数には、厳密なものではなく、3 相材料の平均的なモデルの

$$\phi = \frac{\bar{\sigma}_e^2}{\sigma_f^2} + 2q_1 f_2 \cosh \left( \frac{q_2 \bar{\sigma}_{kk}}{2\sigma_f} \right) - (1 + q_3 f_2^2) \quad (4)$$

を用いる。 $q_1, q_2, q_3$  は Tvergaard によって導入された調整パラメータであり、 $\bar{\sigma}_e$  と  $\bar{\sigma}_{kk}$  はそれぞれ、材料全体の相当応力と垂直応力、 $\sigma_f$  は母材の相当流れ応力である。

ポイドの変化は、成長と発生と合体の 3 つの和で、

$$\dot{f}_2 = (1 - f_2) \dot{\epsilon}_{kk}^p \quad (5)$$

$$+ \frac{f_1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_M^p - \epsilon_N}{s} \right)^2 \right] \dot{\epsilon}_M^p + \frac{f_U - f_C}{\Delta \epsilon} \dot{\epsilon}_M^p$$

と仮定されることが多く、ここでもそれを用いる。ここに、 $s$  と  $\varepsilon_N$  は、ポイド発生に対する標準偏差と平均値であり、 $f_C$ 、 $f_U$ 、 $\Delta\varepsilon$  はそれぞれ、ポイドの合体が起きる限界状態でのポイド体積分率、最終的な破壊に至る直前のポイド体積分率、そして付加的な材料パラメータである。

既往の研究では右辺第2項の  $f_1$  をある仮想的な初期粒子比率  $f_N$  で与えているが、ここでは具体的に、ポイドになりうる粒子の  $f_1$  になっている点がこの研究の特徴である。したがって、剥離を起こした粒子はその剛性を失い、その分だけ弾性剛性が低下する。つまり、式(5)右辺第2項が剥離の発生則となるので、剥離が生じたときは第2項分  $f_{nuc}$  だけ  $f_1$  は減少していくことになる。したがって、ある時点までの剥離した粒子の累積を  $f_{nuc}$  とすると、それまでに剥離せずに残っている粒子の体積比率は  $f_1 - f_{nuc}$  になる。逆に言うと、この時点のポイド体積分率  $f_2$  は  $f_2 + f_{nuc}$  になる。このように剥離による粒子の体積比率の減少が、ポイドの増加になり、式(1)の  $f_2$  の増加によって  $\bar{\kappa}$  と  $\bar{\mu}$  が低下していく。

平均弾塑性接線係数は、文献<sup>1)</sup>に示されている弾塑性接線係数に、平均化手法から得られた平均体積弾性係数  $\bar{\kappa}$  と平均せん断弾性係数  $\bar{\mu}$  を用いることで得られ、

$$\bar{D}_{ijkl}^{ep} \equiv \bar{\mu} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \left( \bar{\kappa} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \right) \delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\sigma_f^2}{H\sigma_f^2 + 9\bar{\mu}\bar{J}_2 + 9\bar{\kappa}\alpha^2\sigma_f^2} \times \left( \frac{3\bar{\mu}\bar{s}_{ij}}{\sigma_f} + 3\bar{\kappa}\alpha\delta_{ij} \right) \left( \frac{3\bar{\mu}\bar{s}_{kl}}{\sigma_f} + 3\bar{\kappa}\alpha\delta_{kl} \right) \quad (6)$$

と表わされる。ここに、 $H$  は材料全体の硬化係数で、 $\bar{J}_2$  は材料全体の偏差応力から計算される第2不変量、そして  $\alpha$  は

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} f_2 q_1 q_2 \sinh \left( \frac{q_2 \bar{\sigma}_{kk}}{2\sigma_f} \right) \quad (7)$$

と定義されている。

### 3. 実験結果との比較

#### (1) 単純梁の3点曲げ試験との比較

まず、文献<sup>2)</sup>に示された単純梁の3点曲げ試験との比較を行う。試験片の寸法は図-1に示す通りである。

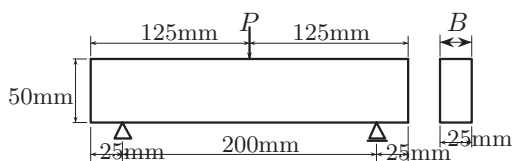


図-1 3点曲げ試験片の寸法

解析対象の対称性から左半分のみに着目し、図-2のようにメッシュ分割を行う。要素数は1000要素である。

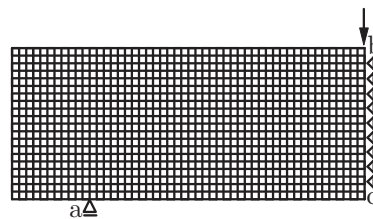


図-2 メッシュ分割図

境界条件は、支点  $a$  上の節点を鉛直方向に拘束し、辺  $bc$  上の節点は水平方向に対して拘束する。そして辺  $bc$  の一番上の節点に強制変位を与える。材料定数は文献<sup>2)</sup>と同じく、母材の初期降伏応力を  $\sigma_y = 339\text{MPa}$ 、母材の相当流れ応力 - 相当塑性ひずみの関係は  $\sigma_f = \sigma_y + 1531 \times (\varepsilon_M^p)^{0.258}$  とした。ここに、 $\varepsilon_M^p$  は母材の相当塑性ひずみである。ヤング率とポアソン比は明記されていなかったが、材料を鋼としているので、それぞれ  $E_M = 206\text{GPa}$ 、 $\nu_M = 0.3$  とした。また、試験片を「欠陥なし」としているため、初期ポイド体積分率は0%とする。発生則と合体則のパラメータに関しては、多くの文献で用いられている  $s = 0.1$ 、 $\varepsilon_N = 0.3$ 、 $f_C = 0.15$ 、 $f_U = 2/3$  を用いる。ポイドを発生させる粒子の剛性は、母材の10倍と1/10倍の  $E_1 = 2060\text{GPa}$ 、 $20.6\text{GPa}$ 、ポアソン比を  $\nu_1 = 0.3$  とし、体積比率は  $f_1 = 0.04$  とする。

図-3は、強制変位を与えた節点の荷重 - 変位関係を示しており、実線が  $E_1 = 2060\text{GPa}$  の場合の解析結果であり、破線が  $E_1 = 20.6\text{GPa}$  の場合の解析結果である。共に、実験結果を比較的良く予測できている。一点鎖線は従来の研究と同じく粒子の剛性が母材と同じ場合の解析結果であり、安定に解析できている範囲では実線と破線の間位置している。ここでは粒子は初期に

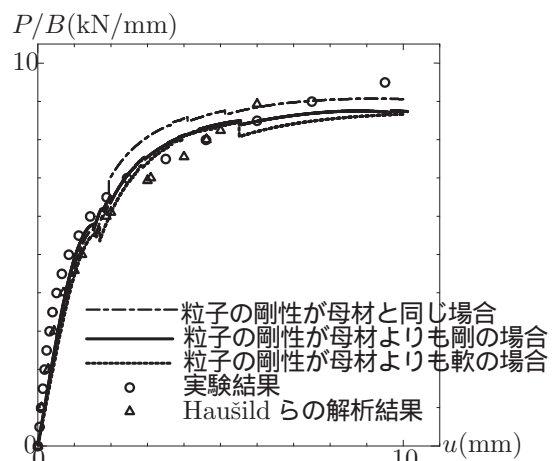


図-3 粒子の剛性による挙動の変化

4%しかないため、 $f_1 = 0$  との差は小さいが、粒子を実際の不純物や介在物としてモデル化すると、粒子の剛性によって全体の挙動が異なってくる。そのため、粒子を単なる損傷パラメータとして扱っている既往の研究で

は、材料の挙動を正確に予測できない恐れがあると考えられる。

さて、このポイドの発生速度を決定するのは式(5)の標準偏差  $s$  と平均値  $\varepsilon_N$  である。図-3を計算するには  $s = 0.1$ ,  $\varepsilon_N = 0.3$  を用いたが、もっと早い段階で損傷が発生するように  $s = 0.02$ ,  $\varepsilon_N = 0.05$  として同じ3点曲げ試験の数値解析を行う。これで得られる結果と  $s = 0.1$ ,  $\varepsilon_N = 0.3$  の結果を併せて図-4に示す。当然の結果となっているが、この結果から、発生パラメータ  $s, \varepsilon_N$  を粒子界面強度の擬似的な表現として捉えることができると考えられる。 $s$  と  $\varepsilon_N$  の値を用いて具体的に界面強度を表すこともできるかもしれない。ただしその場合には、本研究で正規分布として扱っている発生則に他の確率密度関数を用いるという検討も必要だろう。

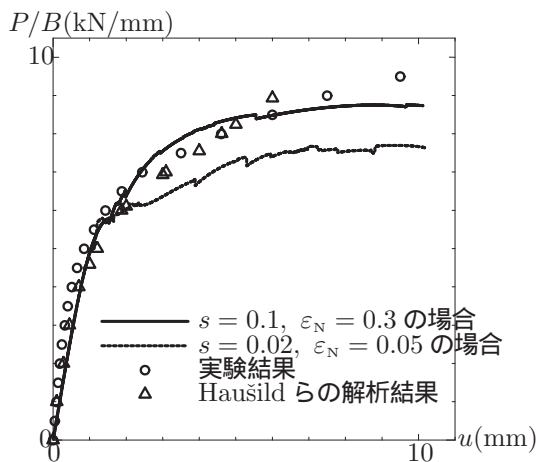


図-4 発生パラメータの値による全体挙動の変化

さて、本研究では弾性剛性の低下も表現できるので、最も引張力が作用する試験片下面中央の要素に着目し、損傷に伴う平均弾性係数  $\bar{E}$  の低下の様子を示す。図-

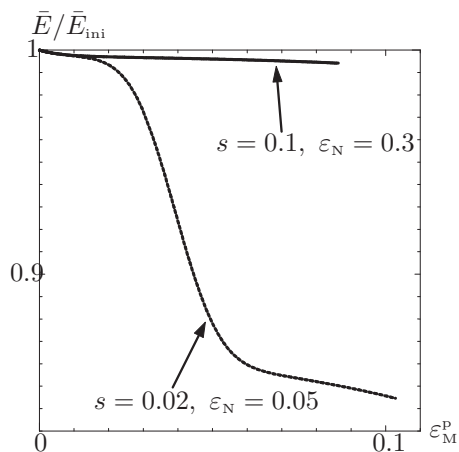


図-5 平均弾性係数の低下の様子

5の縦軸は、時々刻々求められる平均弾性係数  $\bar{E}$  を、損傷が蓄積していない状態での  $\bar{E}_{ini}$  で正規化したもので、横軸は母材の相当塑性ひずみである。ここでは、 $s = 0.1$ ,  $\varepsilon_N = 0.3$  と、損傷の始まりが早い段階で起こるように設定した  $s = 0.02$ ,  $\varepsilon_N = 0.05$  の場合の平均弾性係

数の低下の様子を示している。 $s = 0.02$ ,  $\varepsilon_N = 0.05$  の場合には著しい弾性係数の低下が現れている。当然、この状態では図-4のように荷重 - 変位関係も大きく変わる。

## (2) 介在物を多く含む複合材料との比較

次に、もう少し介在物を多く含む複合材料に対して検討するために、文献<sup>3)</sup>に示された SiC/Al-Cu 複合材料の一軸引張試験を予測してみる。文献<sup>3)</sup>には試験片形状や寸法が示されていないので、ここでは図-6を解析対象とし、メッシュ分割を図-7のように行った。

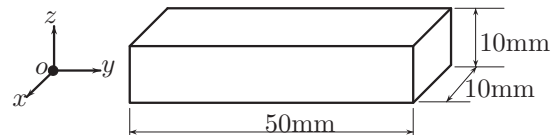


図-6 一軸引張試験片

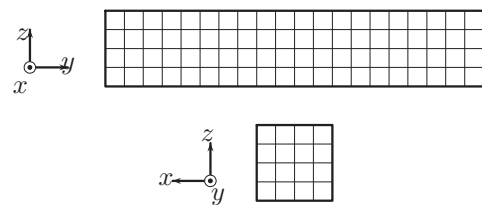


図-7 メッシュ分割図

文献<sup>3)</sup>と同じく、母材の弾性係数とポアソン比を  $E_M = 71.8\text{GPa}$ ,  $\nu_M = 0.33$ , 介在物の弾性係数とポアソン比を  $E_1 = 450\text{GPa}$ ,  $\nu_1 = 0.17$  とした。介在物の体積比率も文献<sup>3)</sup>と同様に  $f_1 = 6\%$  と  $13\%$  を用いる。文献<sup>3)</sup>では各相の降伏応力と硬化パラメータが示されておらず、材料全体の降伏応力と相当流れ応力 相当塑性ひずみ関係を  $f_1$  に関係なくそれぞれ  $\bar{\sigma}_y = 169\text{MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}_y + 463.24 \times (\bar{\varepsilon}^P)^{0.3952}$  としているので、仕方が無いので本研究でもこの値を用いることとする。境界条件は、図-7に示された  $xz$  断面の中央に位置する節点を全方向に拘束し、同じく  $xz$  断面に存在する他の節点は  $y$  方向にのみ拘束する。そして、試験片のもう一方の  $xz$  平面上の節点に荷重を与える。以上のようにして得られる応力 - ひずみ関係が図-8である。

数値解析結果は、介在物の有無に関わらず、弾性剛性だけ異なっていて塑性挙動はほぼ同一である。このような結果になる理由は、介在物の体積比率に関わらず、初期降伏応力や硬化パラメータに文献<sup>3)</sup>にに対し、複合材料全体の平均的な値を使用したためである。ここでの計算では、介在物が付加されているので、その付加に伴う材料全体の平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの導入してモデルの改善を図る。最も簡単な形式である重み付き平均で平均初期降伏応力と平均硬化パラメータを求めることはできるが、文献<sup>3)</sup>には残念ながら各相の降伏応力と硬化パラメータが示されていない。そこで、ここ

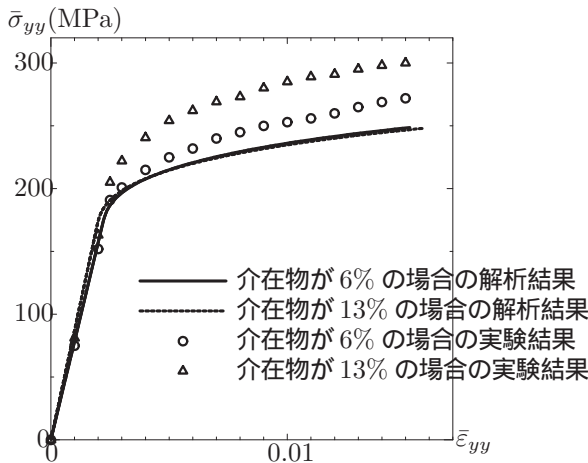


図-8 SiC/Al-Cu 複合材料の応力 - ひずみ関係

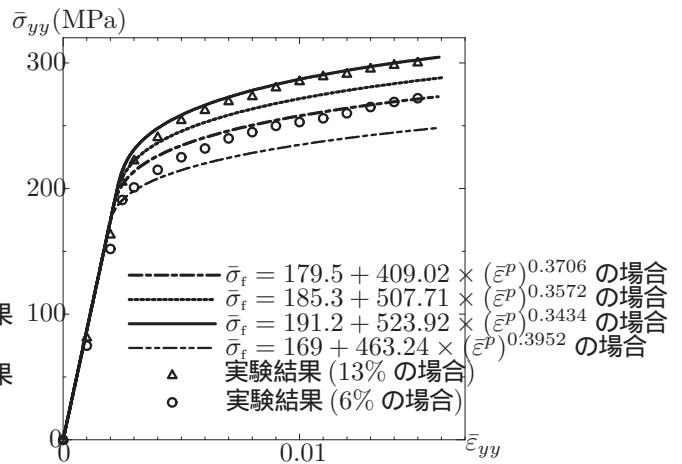


図-9 平均初期降伏応力と平均硬化パラメータの変更による挙動の変化

では、図-8の介在物が6%の場合の解析結果を参照解と設定して、介在物が13%含まれる場合に対する本手法の予測精度の向上を試みる。

まず、介在物が13%含まれる複合材料の平均初期降伏応力  $\bar{\sigma}_y$  から、母材と介在物の降伏応力を逆算で求める。もちろん唯一には求めることができないので、ケース1 ( $\sigma_y^M = 160\text{MPa}$ ,  $\sigma_y^1 = 310\text{MPa}$ )、ケース2 ( $\sigma_y^M = 155\text{MPa}$ ,  $\sigma_y^1 = 388.3\text{MPa}$ )、ケース3 ( $\sigma_y^M = 150\text{MPa}$ ,  $\sigma_y^1 = 466.7\text{MPa}$ )の3通りを想定する。つまり、これらの組み合わせは、介在物が6%の場合に重み付き平均で求められる平均降伏応力が、 $\bar{\sigma}_y = 169\text{MPa}$ になるように選んだ値である。この組み合わせから得られる  $f_1 = 13\%$ のときの平均初期降伏応力  $\bar{\sigma}_y$  は、ケース1~3の順にそれぞれ  $\bar{\sigma}_y = 179.5, 185.3, 191.2\text{MPa}$ である。

次に、平均硬化パラメータを求める。これも文献<sup>3)</sup>には各相の硬化パラメータが示されていないので、平均初期降伏応力の導入によって増加した割合だけ、硬化パラメータを変化させる、という平均化で平均硬化パラメータを求める。ケース1~3の平均初期降伏応力の各値は、厳密な値と仮定した介在物が6%含まれている場合の平均初期降伏応力と比較して、ケース1~3の順にそれぞれ6.21, 9.64, 13.1%増加している。硬化パラメータもこの割合だけ変化させると、各ケースの平均相当流れ応力 - 平均相当塑性ひずみの関係は、ケース1で  $\bar{\sigma}_f = 179.5 + 409.02 \times (\bar{\epsilon}^p)^{0.3706}$ 、ケース2で  $\bar{\sigma}_f = 185.3 + 507.71 \times (\bar{\epsilon}^p)^{0.3572}$ 、ケース3で  $\bar{\sigma}_f = 191.2 + 523.92 \times (\bar{\epsilon}^p)^{0.3434}$ となる。この3つの状態に対して得られる応力 - ひずみ曲線を図-9に示す  $\bar{\sigma}_f = 191.2 + 523.92 \times (\bar{\epsilon}^p)^{0.3434}$ の場合に、塑性挙動を最も良く予測できている。ここで行った平均化は極めてラフな方法ではあるが、実験結果を良く予測できている。

剥離による剛性低下を扱う複合材料の研究では、剥離によってのみ剛性が低下するものとしており、ボイドの成長と合体による損傷を含んでいない。そのために全て

の介在物が剥離を起こした後の剛性低下を表現できていない。それに対し、本手法ではボイドの成長および合体による損傷も含まれているので、粒子が全て剥離した後に起きる剛性の低下も表現できる。そのため、従来の複合材料の研究で用いられている手法よりも、本手法の方が複合材料の損傷解析の精度は上がると考えられる。

#### 4. まとめ

ここまで示した実験結果との比較から、以下の結論を得た。

- ボイドの発生源である粒子の存在を無視する場合には、正確な予測を行えない恐れがあることを指摘できた。
- 複合材料の損傷解析に、ボイドの成長と発生および合体を用いているために、従来の剥離のみによる剛性低下を表現する手法よりも複合材料の損傷解析に適していると考えられる。
- 何らかの簡単な平均化を行って平均初期降伏応力と平均硬化パラメータを導入できれば、本手法を複合材料の弾塑性挙動予測に適用できる可能性があることを示した。

#### 参考文献

- 1) Tvergaard, V.: Material failure void coalescence in localized shear bands, *Int. J. Solids Structures*, Vol.18, pp.659-672, 1982.
- 2) Haušild, P., Berdin, C., Bompard, P. and Verdière, N.: Ductile fracture of duplex stainless steel with casting defects: *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol.78, pp.607-616, 2001.
- 3) Ju, J.W. and Lee, H.K.: A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of partially debonded ductile matrix composites: *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.6307-6332, 2001.

(2005年2月8日提出)