

# 介在物の幾何特性の三次元的分布と複合材料の巨視的強度

Three-dimensional geometrical characteristics of inclusions and overall behavior of composites

湯本 健寛\*

Takahiro YUMOTO

\*構造強度学研究室（指導教官：岩熊哲夫 教授）

Using Mori-Tanaka theory generalized for the inclusions which have several directions and individual material characteristics to composite materials, we have expressed overall yield function for 2-phases composite material explicitly when matrix or inclusions yield by von Mises' criterion. When inclusion have equable distribution on space, overall yield surface is isotropical hexagon in close section on the pi-plane.

**Key Words** : composites, geometrical character, overall yield surface, overall yield criterion, Mori-Tanaka theory, 3-dimensional distribution

## 1. まえがき

現在，幅広い範囲で複合材料が用いられており，また，その新素材の開発も活発である．地盤材料やコンクリートはもちろんのこと，金属材料の代表である鋼も微視的に見ると複合材料であり，土木分野で用いられる材料の多くは複合材料である．これらの材料を用いて構造設計を行う際には，古典塑性論やそれを拡張した現象論的モデルが用いられている．鋼の場合，例えば，von Mises の降伏条件を用いることで，降伏挙動を比較的良好に表現できることは実験で確かめられている．このように，複合材料の平均的降伏特性を工学的範囲で分かっている必要がある．

森・田中理論<sup>1)</sup>は複合材料の平均的挙動について解析的に表現が出来る．そこで，増分断塑性の枠組みに森・田中理論<sup>1)</sup>を組み込み，さらに多相複合材料に対して解析できるように拡張したモデルを用いて，介在物の形状や方向等の幾何学的特性が 2 相複合材料の巨視的初期降伏面に及ぼす影響を把握する．そして，複数種類の介在物がランダムな方向を有している多相複合材料の巨視的初期降伏面についても検討する．

## 2. 多種類の介在物を含む複合材料に対して一般化した定式化

ここでは楕円形状をした介在物が様々な半径比や体積比率・方向を有し，そしてそれぞれの材料特性を有しているものを扱う．森・田中理論<sup>1)</sup>の平均化を用いると多相複合材料に巨視的応力増分  $\dot{\sigma}$  が作用した場合，

各増分量の表現は

$$\dot{\sigma}_M = A\dot{\sigma} + \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_M^p) - \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \quad (1a)$$

$$\dot{\sigma}_i = B_i \dot{\sigma} + \left\{ L_i \sum_i (D_i) - M_i \right\} \dot{\epsilon}_M^p + M_i \dot{\epsilon}_i^p - L_i \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \quad (1b)$$

$$\dot{\epsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + \left\{ I + N \sum_i (D_i) - \sum_i (P_i) \right\} \dot{\epsilon}_M^p + \sum_i \{ (P_i - ND_i) \dot{\epsilon}_i^p \} \quad (1c)$$

となる．ここに， $A, B_i, D_i, L_i, M_i, N, P_i$  は，母材と介在物の材料特性や介在物の形状・体積比率・方向によって決まる 4 解のテンソルである．また， $I$  は 4 階の単位テンソルで， $\bar{C}^{-1}$  は巨視的な弾性コンプライアンスを示している．なお， $'M'$  は母材を表し， $'i'$  が付くものは介在物の種類によってそれぞれ求められる．

## 3. 降伏条件

複合材料の巨視的降伏は，母材または介在物のいずれかが降伏した場合とする．母材と介在物の降伏条件は von Mises の降伏条件に従うものとして

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_M^y \quad (2a)$$

$$f_i = \sqrt{(J_2)_i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i^y \quad (2b)$$

とした．ここに  $\sigma_M^y$  や  $\sigma_i^y$  はそれぞれ母材と介在物の単軸引張り降伏応力である．

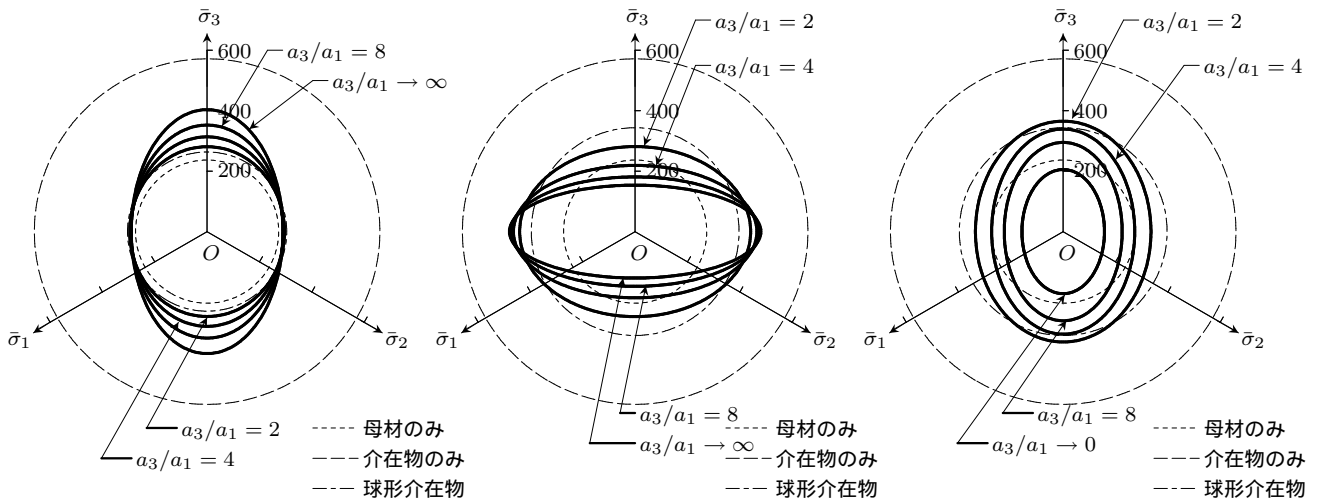


図-1  $a_3/a_1$  の影響 (扁長形介在物, 母材 図-2  $a_3/a_1$  の影響 (扁長形介在物, 介在物降伏) 図-3  $a_3/a_1$  の影響 (扁平形介在物, 介在物降伏)

#### 4. 2 相介在物の巨視的初期降伏面

ここでは、複合材料中に1種類の介在物が分布している場合の巨視的初期降伏面を検討する。対象とする複合材料はSiCで補強した2124Alを想定し、その材料定数は文献<sup>2)</sup>を参考にして以下のように設定した。母材の材料定数はヤング率を  $E_M = 60$  GPa, ポアソン比を  $\nu_M = 0.3$ , 単軸引張初期降伏応力を  $\sigma_M^Y = 290$  MPa とし, 介在物の材料定数はヤング率を  $E_i = 450$  GPa, ポアソン比を  $\nu_i = 0.2$ , 単軸引張初期降伏応力を  $\sigma_i^Y = 700$  MPa とした。ここでは介在物の体積比率  $f$  を同文献で用いられている 13.2% に固定し, その形状の変化による複合材料の巨視的初期降伏面の形状の変化を考える。なお, 章中の「母材降伏」とは介在物の単軸引張初期降伏応力  $\sigma_i^Y$  を大きく設定し介在物が降伏せず母材が降伏するような材料であり, また「介在物降伏」とは母材が降伏せず, 介在物が降伏するような場合をそれぞれ指している。

##### (1) 介在物の半径比が与える影響

ここでは, 回転楕円体形状をした介在物を考え, 介在物の  $x_1, x_2, x_3$  方向の半径比をそれぞれ  $a_1, a_2, a_3$  とした場合,  $a_2/a_1 = 1$  に固定して  $a_3/a_1$  を種々変えることによる巨視的降伏面への影響を検討する。

介在物の形状が  $a_3/a_1 > 1$  の扁長形であるとき, 巨視的静水圧  $\bar{p} = 0$  MPa の  $\pi$  平面上で母材が降伏する場合と介在物が降伏する場合の巨視的降伏面は  $a_3/a_1$  が変化することでそれぞれ図-1, 2 のように変化する。 $a_3/a_1$  の値は 2, 4, 8,  $\infty$  で, 母材のみや介在物のみ・球

形介在物の場合の降伏面は参考のために示した。母材が降伏する場合,  $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2$  の純せん断では介在物内に  $\sigma_{i33}$  方向の応力集中が起こるものの,  $x_3$  方向の応力は母材部分と介在物部分共に中間主応力になるため  $J_2$  が大きくなりないので, この方向で降伏面の変化は少ない。それに対して,  $\bar{\sigma}_3$  軸方向の3軸引っ張り状態では,  $\bar{\sigma}_1$  と  $\bar{\sigma}_2$  そして  $\bar{\sigma}_3$  によって介在物の長軸方向への応力集中が起こり介在物内の主応力差が大きくなる。したがって,  $a_3/a_1$  が大きくなるに伴い, 図-2 に示した介在物が降伏する場合の巨視的降伏面の  $\bar{\sigma}_3$  軸方向の半径は小さくなる。そして,  $a_3/a_1$  が増加するほど応力集中効果が大きくなるため, その効果は大きくなる。このような介在物の補強効果によって母材が降伏する場合の図-1 の降伏面の半径は, 介在物が降伏する場合とこの方向で逆の傾向を示した。なお, 巨視的主応力軸上の目盛は  $\sqrt{2J_2}$  MPa の値を示し, 以降  $\pi$  平面で示す場合は同様とする。

介在物が  $a_3/a_1 < 1$  の扁平形状である場合も, 母材が降伏する場合と介在物が降伏する場合の降伏面の変化は  $a_3/a_1$  についての関係が扁長形と同様に,  $\bar{\sigma}_3$  方向と  $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2$  方向に関して対称であったので, ここでは介在物が降伏する場合のみを図-3 に示した。平たい形状の縁部分つまり  $x_1$  や  $x_2$  軸方向に応力集中が生じるので,  $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2$  のせん断によって最大主応力差  $|\sigma_{i11} - \sigma_{i22}|$  が大きくなる。 $a_3/a_1$  が小さくなるほど応力集中が顕著であるので,  $a_3/a_1$  が小さいほど,  $\bar{\sigma}_3$  軸方向と比較して,  $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2$  方向の降伏面の半径は小さくなる。

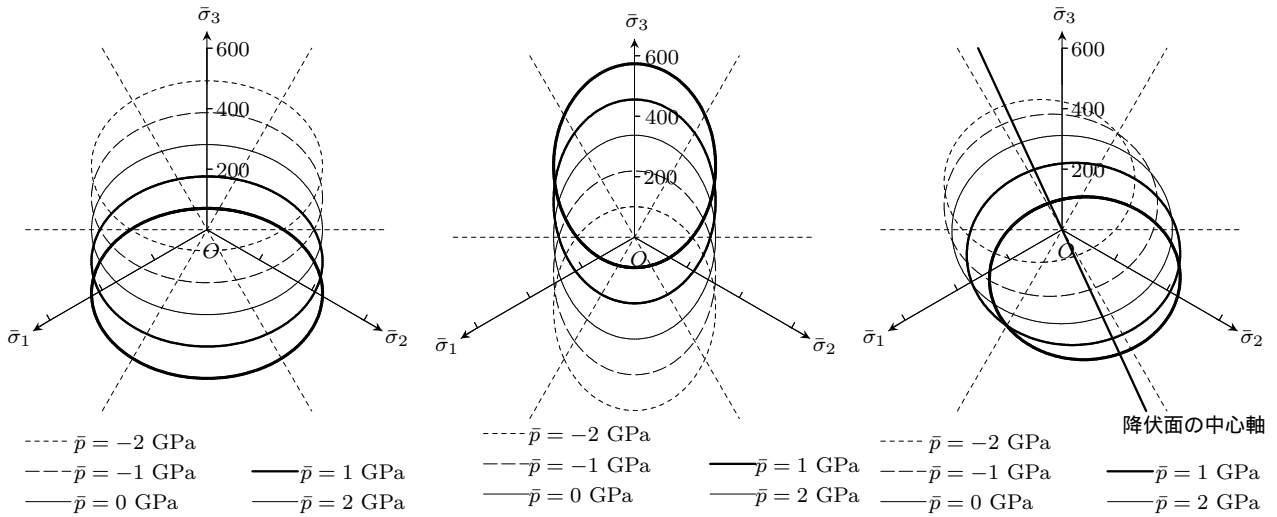


図-4 巨視的静水圧  $\bar{p}$  の影響（扁長形介在物，介在物降伏）  
 図-5 巨視的静水圧  $\bar{p}$  の影響（扁平形介在物，介在物降伏）  
 図-6 介在物の向きの影響（ $a_3/a_1 = 2$ ，介在物降伏）

(2) 巨視的静水圧  $\bar{p}$  が複合材料の巨視的降伏に与える影響

介在物が  $a_3/a_1 = 2$  である場合，巨視的静水圧  $\bar{p} = -2 \sim 2$  GPa の範囲で 1 GPa 毎に巨視的降伏面の等圧線を描くと，図-4 のようになる．また図-5 は  $a_3/a_1 = 1/2$  の場合の等圧線図である．二つの図から， $\bar{p}$  の変化に伴う等圧線の形状の変化は見られない．それに対して，楕円形状をした等圧線の中心位置は変化しているため，中心軸が静水圧軸から傾いた楕円柱形状をしていることが分かる．つまり，巨視的静水圧によって降伏する．また，中心軸上の巨視的応力の比率で介在物内が静水圧状態となるため，複合材料は降伏しない．巨視的静水圧状態で扁長形介在物内に生じる応力は，その形状のため， $\sigma_{i33} > \sigma_{i11} = \sigma_{i22}$  の関係となる．したがって，扁長形介在物内が静水圧状態となる巨視的応力の組み合わせは， $\bar{\sigma}_3 < \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1$  の領域にあるため，中心軸は静水圧軸より  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2$  平面側に傾く．

(3)  $a_2/a_1 = 0$  の介在物で補強した 2 相複合材料の巨視的初期降伏面の表現

介在物が降伏する場合の応力空間での巨視的降伏面を解析的に示すことを試みる．まず，介在物内の応力を巨視的応力で表した式 (1b) を，介在物の降伏条件式 (2b) に代入すると

$$\begin{aligned}
 (\sigma_i^y)^2 = & \left[ Q_i (\bar{\sigma}_{11})^2 + R_i (\bar{\sigma}_{22})^2 + S_i (\bar{\sigma}_{33})^2 \right. \\
 & - T_i (\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22}) - U_i (\bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33}) - V_i (\bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{11}) \\
 & \left. + 3 \left[ W_i (\bar{\sigma}_{23})^2 + X_i (\bar{\sigma}_{31})^2 + Y_i (\bar{\sigma}_{12})^2 \right] \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

という最も一般的な異方性の降伏条件式が得られる．介在物の座標系と巨視的座標系が一致している場合，巨視的主応力空間で巨視的降伏面の中心軸では降伏しないことから，その中心軸の方向ベクトルを  $(n_1, n_2, n_3)$  とすると，

$$\begin{aligned}
 1 = & \left[ Q'_i \left( \frac{\bar{\sigma}_1}{n_1} - \frac{\bar{\sigma}_2}{n_2} \right)^2 + R'_i \left( \frac{\bar{\sigma}_2}{n_2} - \frac{\bar{\sigma}_3}{n_3} \right)^2 \right. \\
 & \left. + S'_i \left( \frac{\bar{\sigma}_3}{n_3} - \frac{\bar{\sigma}_1}{n_1} \right)^2 \right] \\
 & + [2T'_i \bar{\sigma}_{23}^2 + 2U'_i \bar{\sigma}_{31}^2 + 2V'_i \bar{\sigma}_{12}^2] \quad (4)
 \end{aligned}$$

のような関係となる．これは式 3 の前半の [] 部分を書き換えたことと等しい．したがって，式 (3) と式 (4) の係数の関係を求めると

$$Q'_i = \frac{n_1^2 n_2^2 Q_i}{2 (2\sigma_i^y)^2}, \quad R'_i = \frac{n_2^2 n_3^2 R_i}{2 (2\sigma_i^y)^2}, \quad S'_i = \frac{n_3^2 n_1^2 S_i}{2 (2\sigma_i^y)^2} \quad (5)$$

$$T'_i = \frac{3W_i}{2 (\sigma_i^y)^2}, \quad U'_i = \frac{3X_i}{2 (\sigma_i^y)^2}, \quad V'_i = \frac{3Y_i}{2 (\sigma_i^y)^2}$$

となる．また， $n_1, n_2, n_3$  は介在物の応力集中係数  $B$  の成分で表せるので， $B$  が分かれば，降伏条件式が得られる．なお，母材が降伏する場合の降伏条件式は， $B$  の代わりに  $A$  を用いれば良い．

(4) 介在物の方向が複合材料の巨視的初期降伏面に与える影響

図-6 は， $a_3/a_1 = 2$  の扁長形介在物の長軸が  $x_3$  軸に対して  $x_1$  軸方向に 30 度傾いた場合の巨視的降伏面の等圧線図を示している．介在物の長軸方向が異なる

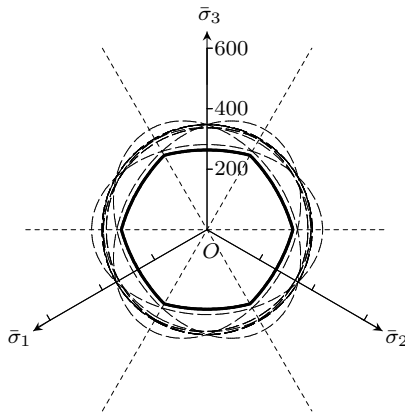


図-7 介在物がランダム方向を向いている場合の初期降伏面 ( $a_3/a_1 = 2$ ,  $\bar{p} = 0$  MPa, 介在物降伏)

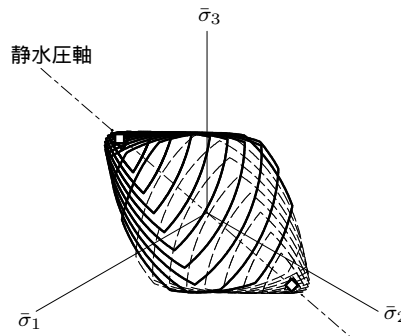


図-8 主応力空間での初期降伏面の立体図 ( $a_3/a_1 = 2$ ,  $\bar{p} = 0$  MPa, 介在物降伏)

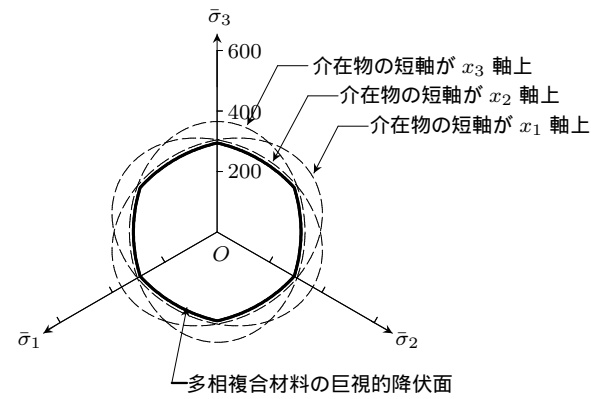


図-9 介在物がランダム方向を向いている場合の初期降伏面 ( $a_3/a_1 = 1/2$ ,  $\bar{p} = 0$  MPa, 介在物降伏)

ため、 $\bar{p}$  について降伏面がずれる方向は図-4 と異なっているが、「傾く」方向は介在物の長軸方向とほぼ等しい。また、 $|\bar{p}|$  が大きくなるほど各等圧線の半径が小さくなっていることから、介在物の長軸が  $x_3$  軸上にある場合、図-4 のように楕円柱形状ではなく、降伏面は閉じた形状となっている。これは、巨視的座標系と介在物の座標系が異なる場合、巨視的応力のみが作用すると、介在物内にせん断力が生じるためである。そのため、巨視的静水圧  $|\bar{p}|$  の増加に伴って、介在物内に働くせん断力が大きくなり、 $J_2$  が増加するので降伏面の半径は小さくなる。なお、図中には、各等圧線の中心を結んだ線を中心軸として示した。

このように介在物が傾き、巨視的座標系と介在物の座標系しない場合にも介在物の座標軸方向の応力に変換することで式 (4) の降伏条件が利用できるはずである。したがって、巨視的応力  $\bar{\sigma}$  を空間的に座標変換し、載荷軸と介在物の座標軸を一致させれば、式 (4) を降伏条件として扱える。

## 5. 多相介在物の巨視的初期降伏面

半径比が等しい複数種類の介在物について、その方向が複合材料内で完全にランダムである場合には、複合材料は巨視には完全等方性の挙動を示しそうである。半径比が等しい複数種類の回転楕円体介在物の方向が空間的にランダムに分布する複合材料を想定し、その等方的な巨視的降伏面について考察する。母材と介在物は、先の章で用いたものと同様に、それぞれ 2124Al と SiC とし、介在物の体積比率  $f_i$  は介在物全体で 13.2 % とする。したがって、介在物の種類数  $n$  で 13.2 を割った比率  $13.2/n$  % を一種類の介在物の体積比率とする。

介在物を配置した時点で全ての巨視的座標軸に対称

となるように 13 種類の半径比 1:1:2 の扁長形回転楕円体介在物が分布した多相複合材料の巨視的降伏面は図-7 の実線となる。点線は 13 種類のうちいずれかの介在物を 1 種類含む 2 相複合材料の降伏面である。その場合、介在物の体積比率は 13.2 % である。点線のうち最も内側の線を形成するのは、介在物の長軸を  $x_1, x_2, x_3$  軸に持つ場合の降伏面である。実線で示した多相複合材料の降伏面は、このうち側の線を繋いでできる形状とほぼ同じ形状をしている。そして、多相複合材料の各巨視的降伏点では  $x_1, x_2, x_3$  軸上に長軸を持つ介在物のいずれかが降伏するため、これらの降伏面によって決定される。 $\pi$  平面上のある方向に載荷すると、介在物の長軸方向に応力が集中するため純せん断状態にはならず、3 軸引っ張りもしくは 3 軸圧縮に近い状態で、3 種類の介在物のいずれかが降伏する。そのため、巨視的にも図-7 のような降伏面となる。また、 $-2 < \bar{p} < 2$  GPa の範囲で 200 MPa ピッチで降伏面の等圧線を引き、 $\pi$  平面から若干ずらした方向から見ると、図-8 のように降伏面の形状を立体的に見ることができる。降伏面はは等方的かつ静水圧軸方向に閉じており、凸面を持つ形状となる。

一方、 $a_3/a_1 = 1/2$  の扁平形介在物が同じように分布している多相複合材料の巨視的降伏は、やはり、巨視的座標軸上に長軸を持つ 3 種類の介在物のいずれかが降伏する。図-9 の実線でその巨視的降伏面を示した。巨視的直応力が作用すると、介在物の円周縁に応力集中が起こり、この 3 種類の介在物のいずれかがその面内の純せん断に近い状態で降伏する。そのために、巨視的にも Tresca の降伏面のような形状となる。なお、介在物の形状が扁長形・扁平形の両方の場合で、母材が降伏する場合の降伏面は von Mises の降伏面となった。

## 6. まとめ

森・田中理論を用いて介在物の形状や方向といった幾何特性と複合材料の巨視的初期降伏面検討し、また、介在物がランダム分布した場合の初期降伏面を考えることで、以下のような知見を得た。

- 介在物の形状による応力集中が 2 相複合材料の初期降伏面に与える影響を示した。
- 介在物の形状や方向の影響で巨視的初期降伏面の中心軸が静水圧軸から「傾く」事を示した。
- 2 相複合材料の降伏条件式を解析的に表現した。
- 介在物がランダム分布する場合の巨視的初期降伏面を定性的に示した。

### 参考文献

- 1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 2) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.

(2004 年 2 月 9 日 提出)