

# 解析的手法を用いた複合材料・複合構造の 3 次元有限要素

Three-dimensional finite element of composite materials and structures  
using an analytically averaged model

王 峰\*

WANG Feng

\*構造強度学研究室 (指導教官: 岩熊哲夫 教授)

Using overall elastic moduli of composite materials which is obtained basing on the Mori-Tanaka theory, we construct a three dimensional finite element of composite materials. Applying the finite element to boundary value problems, we can show the eligibility of our model by solving several actual composite structures made of composite materials. Moreover, an optimization using sequential quadratic programming(SQP) method has been carried out to show the advantage of our analytical model.

**Key Words :** overall elastic moduli, Mori-Tanaka theory, three dimensional finite element, SQP method

## 1. まえがき

近年, 各種複合材料が高性能・高機能な材料として次々と開発され, 幅広く用いられるようになった. 例えば, 酒田みらい橋は鋼繊維補強高強度高流動コンクリート「ダクトル」を用いて建設された歩道橋である. ダクトルは鋼材に匹敵する強度を有し, 靱性に優れ, 耐久性も高く, 従来のコンクリートとは桁違いの性能を持つ材料である. 酒田みらい橋はダクトルを用いたことにより, 極めて薄い部材の低い桁高で長スパンおよび大幅軽量化を実現した<sup>1)</sup>.

このような複合材料でできた構造の, 例えば最適設計等を念頭に置いた場合, 有限要素解析において, 設計変数による変動ができるだけ陽な形で求められると便利である. したがって, 微視構造をそのまま要素分割するのではなく, 例えば何らかの解析的な平均化手法で構成モデルが与えられていると有利である. 解析的に材料の平均挙動を予測する手法は多く存在するが, 例えば森・田中理論<sup>2)</sup>に基づく手法では, Eshelby のテンソル<sup>3)</sup>を介して介在物の体積比や形状, 向きを陽に表現することができるため, 材料の微視構造のモデル化が比較的容易であろう.

そこで本研究では, 森・田中の手法によって求められる弾性係数を有限要素の構成則として用い, 複合材料有限要素の定式化を行う. 定式化された複合材料有限要素法の応用として, 幾つかの境界値問題を解き, その有用性を示す. また鋼繊維補強材を用いた梁構造物について制約条件, 目的関数を定めて, 適当な非線形計画法を用いて最適化を行うことによって, 本手法の利点を強調する.

## 2. 森・田中理論に基づく平均弾性係数の有限要素法への導入

母材と介在物共に等方弾性体であり, 母材中に楕円介在物が分布しているときの複合材料全体の平均弾性係数  $\tilde{C}$  は, 森・田中理論を用いると

$$\tilde{C} = C_M \{C_M - (1 - f)(C_M - C_I)S\}^{-1} [C_M - (C_M - C_I)\{S - f(S - I)\}] \quad (1)$$

と求められる. ここに,  $f$  は介在物の体積比率であり,  $I$  は 4 階の単位テンソルである.  $C_M$  と  $C_I$  はそれぞれ母材と介在物の弾性係数である. また  $S$  は Eshelby のテンソルとよばれ, 母材のポアソン比  $\nu_M$  と介在物の形状比だけで決まる量である.

ここでは六面体アイソパラメトリック要素を用いて定式化をすると, 要素剛性マトリクスは

$$K^e = \int_v (\partial\phi)^T \tilde{C} \partial\phi dV \quad (2)$$

となる. ここで  $\phi$  は形状関数ベクトルで,  $\tilde{C}$  は森・田中理論による上式の弾性係数  $\tilde{C}$  でできた行列で, 式 (1) で得られた弾性係数を Voigt 表記をした複合材料全体の平均的な応力ひずみ関係にして

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{43} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{53} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{63} & \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{65} & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ 2\bar{\epsilon}_{23} \\ 2\bar{\epsilon}_{31} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix}$$

と表したときの右辺の行列である.

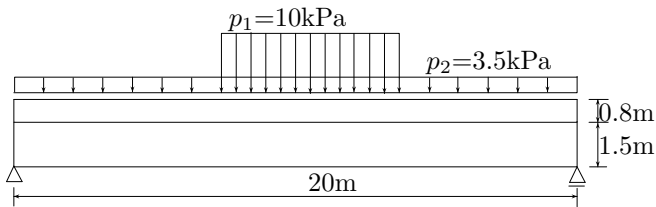


図-1-a 境界条件と荷重条件

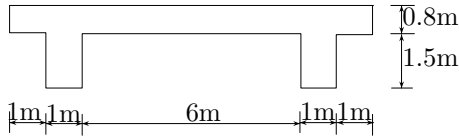


図-1-b 断面寸法

図-1 対象とする幅広けた橋

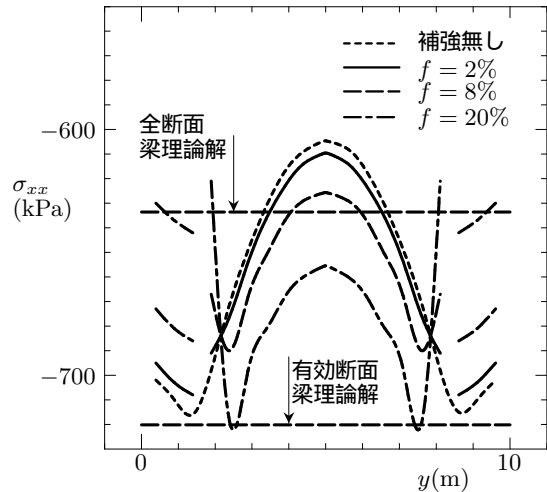


図-2 フランジRC部の応力分布 — 橋軸直角方向繊維

### 3. 複合構造解析

#### (1) 幅広けた橋のせん断遅れ

近年合理化橋梁のひとつとして少数主けたが用いられる。特に大規模橋梁の場合にはPC床版と共に用いられるが、そうでない場合には幅広フランジの影響で「せん断遅れ現象」が生じることがある。この「せん断遅れ」は現在、有効幅を用いることによって設計されている。ここでは繊維補強による「せん断遅れ」の緩和と応力の再分配効果を考察する。

解析対象は図-1の支間長が20mで断面高が2.3m、断面幅が10mの幅広のTけた橋である。解析対象を1040個の六面体要素でメッシュ分割し、主桁部直上面にL荷重を載荷する。簡単のため鉄筋コンクリートのヤング率 $E=30\text{GPa}$ とポアソン比 $\nu=0.2$ を用い、補強用鋼繊維のヤング率を $E_1=210\text{GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_1=0.2$ とする。鋼繊維は $a_1=a_2$ 、 $a_3/a_1=50$ の回転楕円体でモデル化し、PC床版の鋼棒のように、全梁を通じて一様にその長軸が橋軸直角方向に平行に分布させる。

中央断面におけるフランジ部の鉄筋コンクリート内の、梁の軸方向直応力分布を示したのが図-2の破線である。主桁部の直応力は全断面有効としたときの梁理論の解より大きくなるが、有効断面を用いた解とほぼ一致する。そこで、このフランジ部を2%の繊維で補強したのが実線である。さらに介在物の体積比率を増やすに従って梁部分の直応力は全断面有効梁理論解に近づき、8%程度の繊維量で梁部・フランジ部の応力レベルが均等になる。さらに20%の繊維量で、梁部分の直応力は全断面有効の梁理論にほぼ一致する。

一方、繊維を橋軸方向に分布させたときの応力分布を図-3に示した。この場合は、繊維量が8%程度で、全断面を用いた梁理論で設計しても桁部分は安全側であることがわかる。ただし橋軸直角方向を向かせた場合のような応力レベルの均等化は見られない。繊維を床版面内で45度方向に分布させると、この二者の中間的な挙動

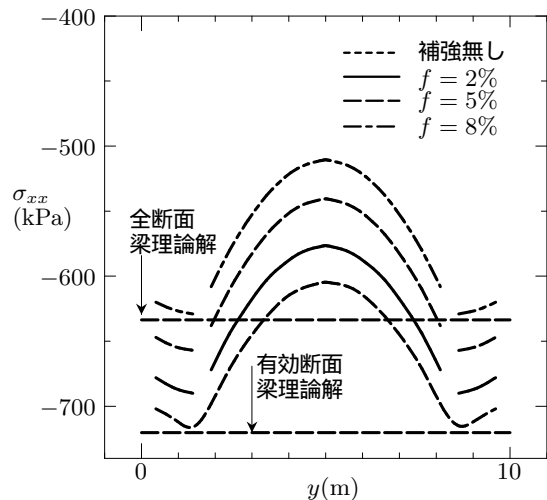


図-3 フランジRC部の応力分布 — 橋軸方向繊維

になった。このことから、PC床版のように橋軸直角方向に繊維を分布させと応力レベルの均等化が図れ、橋軸方向分布では全体的なせん断遅れの緩和ができることを示すことができた。もちろん、床版部分のコンクリート部の応力は、補強前よりも増大してしまうが、ここは高強度コンクリートのメリットが活かされると考えられる。

#### (2) 応力集中の補強

酒田みらい橋は軽量化のためにウェブに開口部を設けている。この部分の応力集中について1パネルを取り出し、本手法で応力解析をする。酒田橋梁の一般図と断面図を図-4-aに示した。ここではスパン中央の幅1.8mのパネルを取り出して3次元解析を行う。解析対象を図-4-bのように596個の六面体要素でメッシュ分割し、梁理論から求めたこの断面の応力を荷重としてこのパネルの左右端面に作用させる。材料は繊維がランダム分布したダクタイルを母材とし、そのヤング率として $E=50\text{GPa}$ 、ポアソン比を $\nu=0.2$ とする。また鋼繊維介在物のヤング率を $E_1=210\text{GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_1=0.2$

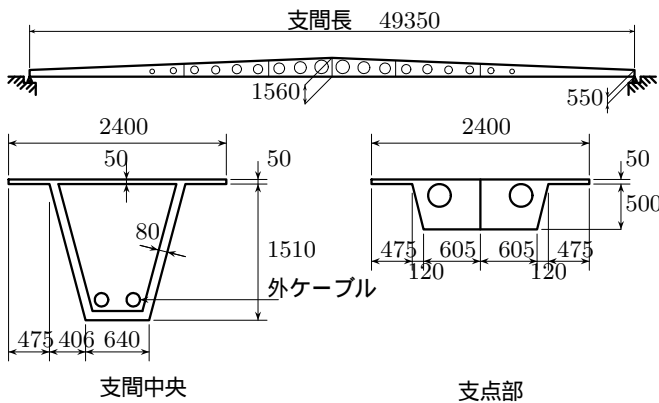


図-4-a 全体一般図及び断面図

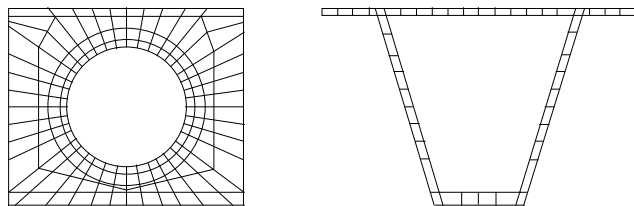


図-4-b 要素分割

図-4 対象とする酒田みらい橋

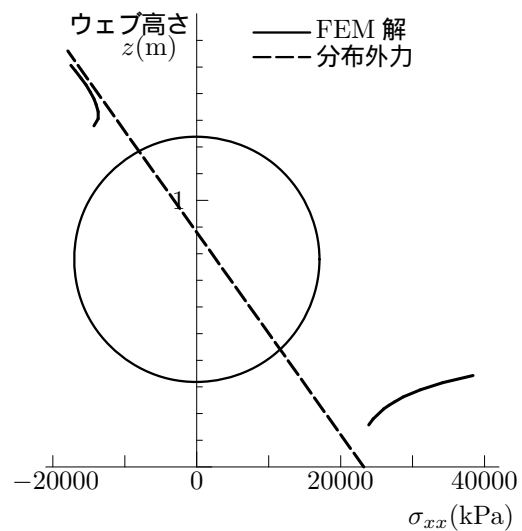


図-5 開口部の応力集中

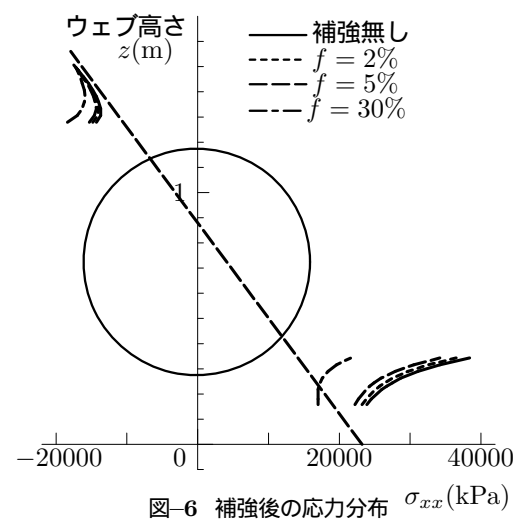


図-6 補強後の応力分布  $\sigma_{xx}$  (kPa)

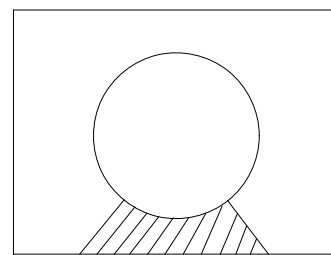


図-7 開口部補強部位

とする。図-5 に破線で示したのが、このパネルの左右端に与えた分布外力で、実線が開口部の母材（ダクトル）の応力分布である。圧縮側は応力集中が無いが、中立軸から離れるに従って応力は増加してモーメントを確保している。引張側は、円孔直下で 2.32 の応力集中があるが、中立軸から離れると応力は小さくなる。

次に鋼繊維を  $f = 0.02, 0.05, 0.1, 0.3$  と加えた場合の応力分布を図-6 に示した。鋼繊維は図-7 のハッチングの部分すべてに一樣に橋軸水平方向に揃えて入れた。鋼繊維の半径比は  $a_1 = a_2, a_3/a_1 = 50$  の長楕円体で設定する。この図から明らかなように、圧縮域には変化は現れないが、引張り域の応力応力レベルは改善されている。

#### 4. 最適化

解析対象例として図-8 のように、スパン 9 m で断面高が 0.6 m、断面幅が 0.4 m の梁を用い、最適化を試行する。材料は第(1)節と同じとする。簡単のために図-8-c のように梁を対称に三つの区間に分け、両端区間の繊維の体積率は  $f_1$  で、中央区間の繊維比率は  $f_2$  とし、総繊維量に  $2f_1 + f_2 = 0.06$  という拘束条件を課す。繊維長軸は常に  $x$  軸に一致するとする。解析対象を 720 個の六面体要素でメッシュ分割して、上面に等分布面荷重を図示したように載せる。この  $f_1, f_2$  を設計変数として目的関数

$$\Pi(f) = \frac{1}{2} F^T K^{-1}(f) F$$

を最小化して最適解を求める。すなわち、与えられた外力条件でコンプライアンスを最小にすることになり、従って構造系全体としての剛性を最も大きくすることが目的になる。

ここでは文献<sup>5)</sup>のソフトを利用し、逐次 2 次計画法を用いた。図-9 には、最適化の繰返し回数ごとの  $\Pi$  の値をプロットした。この場合  $f_1 = 0.03, f_2 = 0.0$  から始めたが、5 回でほぼ収束した。最適な繊維量は

$$f_1 = 0.021, f_2 = 0.018$$

である。同図には  $f_1$  に対する  $\Pi_{\text{MIN}}$  の値を FEM 順解析によって求めたものを示し、最小であることを確認し

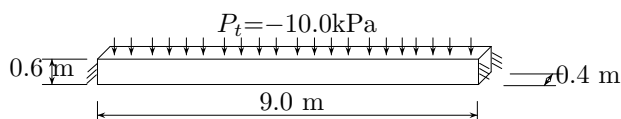


図-8-a 両端固定梁の境界条件 (等分布荷重)

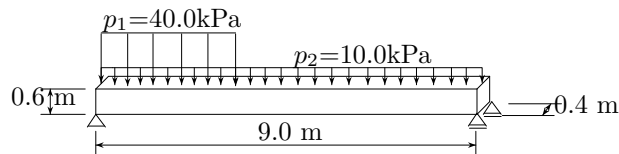


図-8-b 単純支持梁の境界条件 (端部 L 荷重)

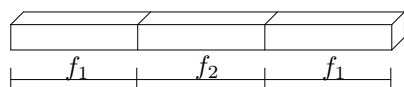


図-8-c 介在物体積率の分布

図-8 最適化解析対象

た。

次に、図-8-bのように両端単純支持で、サイドスパンの設計のために荷重を端部重点で作用させた場合の最適化をした。図-10には、最適化の繰返し回数ごとの  $\Pi$  の値をプロットした。この場合  $f_1 = 0.0$ ,  $f_2 = 0.06$  から始めたが、3回でほぼ収束した。最適な繊維量は

$$f_1 = 0.02241, f_2 = 0.0152$$

である。同図には  $f_1$  に対する  $\Pi_{\text{MIN}}$  の値を FEM 順解析によって求めたものも示した。

## 5. まとめ

森・田中理論を利用した平均化で得られる複合材料の無限体の材料特性を、積分点での構成則として捉え、3次元の複合材料有限要素を構築した。この有限要素を用いて、複合材料でできた構造の境界値問題に適用した。最も簡単な例として挙げた単純梁で、解析の妥当性の確認を兼ねて、補強繊維体積比率や向きの変動による構造系の応答を求めた結果、現実的な体積比率の範囲では、体積比率が剛性を改善する効果はほぼ線形であることを示した。また繊維の向きを制御する場合には、座標変換則が関与するため、非線形性を有する効果を持つことを定量的に示すことができた。

また、実際の構造の設計に繊維補強材料を用いることを念頭に置いて、幅の広い橋のせん断遅れを緩和する効果をひとつの例として解析した。その結果、繊維の向きによって、母材内の応力レベルを減少させる効果と応力レベルの均等化の効果を定量的に把握できた。また、実在する酒田みらい橋のウェブ開口部の応力集中の緩和効果についても検討し、鋼繊維量に対する補強効果を示すことができた。

最後に、微視構造を代表する量である介在物の体積比率を設計変数として、複合材料有限要素を用いた複合構造部材の最適化を試みた。目的関数の設計変数による微

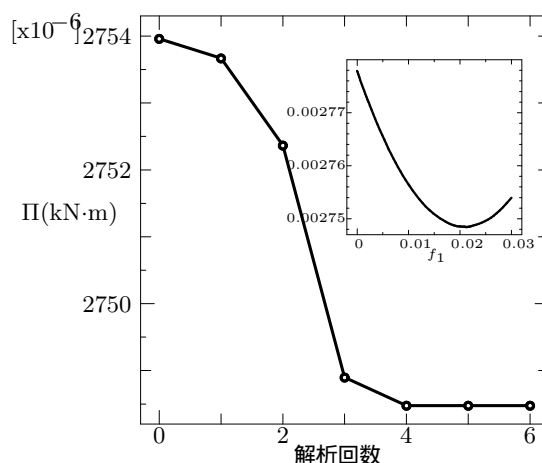


図-9 ひずみエネルギーの最小化 (両端固定梁等分布荷重)

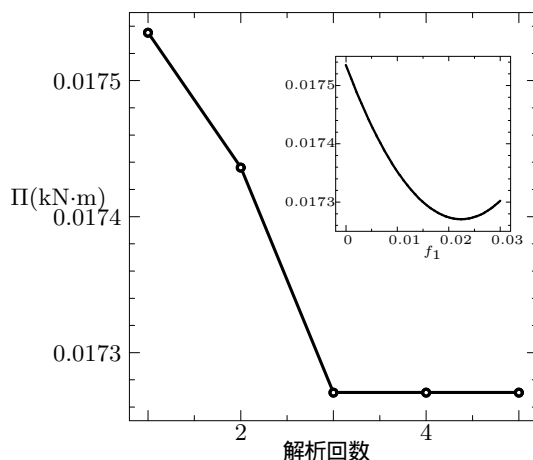


図-10 ひずみエネルギーの最小化 (単純支持梁端部 L 荷重)

係数を数値微分で求めてはいるが、容易に最適化手法との融合を図ることができた。その結果、簡単な両端固定梁また単純支持梁を例とした場合に、数回で最適解が得られ、妥当な体積比率の設計が、与える荷重条件ごとに算定できることも示すことができた。今後は現実の複合構造に対して、塑性特性や強度を含めたモデルによる最適化を検討したい。

## 参考文献

- 1) 武者浩透, 大熊光, 大竹明朗, 児玉明彦, 関文夫, 小林忠司: 無機系複合材料 (RPC) を用いた酒田みらい橋の設計と施工, 橋梁と基礎, pp.1-10, 2002.
- 2) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 3) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 4) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 森勉, 村外志夫: 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 5) 矢部博・八巻直一: 非線形計画法, 朝倉書店, 1999.

(2004年7月16日提出)