

複合材料の微視構造特性の変動と構造物の巨視的挙動

Stochastic characteristics of microstructures of composites and overall behavior

鷺川 拓*

Taku NIEKAWA

*構造強度学研究室（指導教官：岩熊哲夫 教授）

For a CST-element in plane strain, into which an analytic averaging method of moduli of composites is built, we applied a formulation of stochastic finite element method. By using this method, macroscopic response for dispersion of microscopic structure can be verified. Such an analytical method is useful from a designing point of view. Results of numerical analysis for some boundary value problem is given.

Key Words : composites, Mori-Tanaka theory, stochastic finite element

1. まえがき

近年，地球規模で問題になっている省資源，環境負荷の低減に対するエネルギー消費の効率化を達成するために，多くの新しい複合材料の研究・開発が進められている．その際に，森・田中理論¹⁾のような解析的な平均化手法を用いれば，あらかじめ材料配合の範囲を絞り込むことができ，効率的に材料開発ができるため便利である．また，森・田中の平均化手法は比較的簡単な計算で弾性係数を求めることができるため，境界値問題に適用できれば複合材料の最適設計などが可能となる．

既往の研究において，森・田中の手法によって求められる複合材料の巨視的挙動を，有限要素法の材料則にそのまま適用した要素の定式化が行われている．そこで本研究では，その有限要素が微視構造の影響を陽な形で表現できるという利点を生かして標準的な確率有限要素法の定式化を行った．そして介在物の体積比率が変動する場合と形状が変動する場合について，応力の確率変動にどのような影響があるのかを検証した．ここでは，体積比率が変動する場合のみ示す．さらに，連続梁のある部分の体積比率が変化するとき，その周りの部材に及ぼす影響を定量的に示した．得られた結果は予想の範囲内であったが，その影響を比較的簡単な計算で確かめることができた．

2. 平均弾性係数の確率有限要素法への導入

文献²⁾にもあるように，材料が全て等方弾性体であり，母材中に回転楕円介在物が分布しているときの複合材料全体の平均弾性係数 \bar{C} は森・田中理論を用いて

$$\bar{C} = C_M \{ C_M - (1 - f) (C_M - C_I) S \}^{-1} [C_M - (C_M - C_I) \{ S - f(S - I) \}] \quad (1)$$

と求められる．ここに， f は介在物の体積比率であり， I は 4 階の単位テンソルである． C_M と C_I はそれぞれ母材と介在物の弾性係数である．また S は Eshelby のテンソル¹⁾と呼ばれ，母材のポアソン比 ν_M と介在物の半径比 $a_2/a_1 = \eta$ だけで決まる量である．

ここでは式 (1) をそのまま有限要素の要素剛性行列 k の算定に用いる．その k を用いて導かれる剛性方程式が f や η の陽な表現になっていることを利用して，2 次近似項までを考慮した標準的な確率有限要素法の定式化³⁾を行った．例えば第 k 要素の体積比率 f_k が変動する場合には

$$f_k = f_k^0 (1 + \alpha_k) \quad (2)$$

と与える．ここに， f_k^0 は体積比率の期待値で， α_k は期待値 0 の確率変数である．

3. 確率密度関数の入出力

入力する確率密度関数 $f_A(\alpha)$ は正規分布関数のみを用いる．また，応答は注目する要素の応力 σ である．2

次近似項までを考慮するため，応力は

$$\sigma = \sigma^0 + \sum_k \sigma_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_\ell \sigma_{k\ell}^{II} \alpha_k \alpha_\ell \quad (3)$$

によって評価される．ここに， σ^I と σ^{II} はそれぞれ，応力の 1 次摂動項と 2 次摂動項である．このとき，応力の確率密度関数 $f_S(\sigma)$ は

$$f_S(\sigma) = \frac{f_A(\alpha)}{|\partial\sigma/\partial\alpha|} = \frac{\frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2/2\sigma_A)}{|\sigma_k^I + \sigma_{k\ell}^{II} \alpha|} \quad (4)$$

によって求められる．ここに，本論文では単一の確率変数 α を用いる．また応力の確率変動の範囲は，応力の標準偏差を σ_S としたときの $3\sigma_S$ 限界内であるとする．

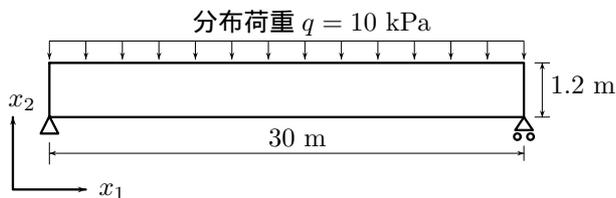


図-1 対象とする単純支持梁

4. 体積比率の変動による影響

解析対象は山形県の酒田みらい橋⁴⁾ (大成建設(株)・太平洋セメント(株)・前田製管(株))をモデルとする。酒田みらい橋は鉄筋を使用せずに超高強度繊維補強コンクリート(ダクトル)と外ケーブルを用いることにより、大幅な軽量化と建設費用の削減を実現した長スパンの歩道橋である。ダクトルは、超高強度コンクリートを鋼繊維によって補強した複合材料である。

実際の酒田みらい橋は支間長が 49.35 m で端部の桁高が 0.55 m, 中央部の桁高が 1.56 m の偏断面の単径間梁であるが、本論文では右図に示したように、スパン 30 m, 桁高 1.2 m の長方形断面を単純支持したものとしてモデル化した。梁の上辺には材料の弾性域を超えない程度として 10 kPa の等分布荷重を与えた。ダクトルを想定した材料定数は母材のヤング率を $E_M = 45$ GPa, 介在物のヤング率を $E_I = 200$ GPa と設定した。また、母材と介在物のポアソン比はそれぞれ $\nu_M = 0.2$, $\nu_I = 0.3$ と設定した。要素分割は有限要素法による解が十分に収束する分割数として、6 層 150 列の計 3600 要素を用いた。

(1) 標準偏差の大きさと応力確率変動の関係

ここでは介在物の体積比率が変動し、体積比率が $f = 2\%$ で半径比が $\eta = 75$ の x_1 方向に細長い介在物で補強する場合を考える。また、介在物の長径軸はすべて x_1 方向を向いているものとする。このとき、標準偏差 σ_A が 0.1 と 0.2 のときの結果がそれぞれ図-2 と図-3 である。ここに、図中の縦軸は式 (4) によって評価され、横軸は式 (3) によって求められる x_1 方向の応力 σ_{x_1} をその有限要素解 σ^{FEM} で正規化した値である。このとき、正規化された応力の標準偏差を σ_N とすると、図-2 と図-3 の応力の標準偏差はそれぞれ $\sigma_N = 0.0019$ と $\sigma_N = 0.0038$ であった。この結果から、体積比率の標準偏差 σ_A が増加すると、応力の標準偏差 σ_N も比例して増加することが確認できる。また、応力の確率変動の期待値は FEM 解より僅かに小さくなり、特に $\sigma_A = 0.1$ の場合では、ほぼ σ^{FEM} に一致している。

次に、標準偏差が $\sigma_A = 0.2$ で体積比率を 2% から

10% に増加させた場合の結果が図-4 である。この場合、応力の標準偏差が 0.014 に増加している。さらに期待値が FEM 解より明らかに小さくなり、応力の確率変動のピークは大きい値に移動していることも確認できる。つまり、体積比率が増加する場合も σ_N は増加し、応答の非対称性も増加する。図-2 と図-3 からは違いが分かりづらいが、標準偏差 σ_A の増加につれて非対称性は増加する。

(2) 半径比の大きさと応力確率変動の関係

ここでは応力の確率変動の変化が分かりやすい例として、体積比率が $f = 10\%$ で標準偏差が $\sigma_A = 0.2$ の場合を考え、介在物の半径比を $\eta = 5, 1$ とした場合の応答の変化を検証する。そのときの結果がそれぞれ図-5 と図-6 である。図-4 を含めたこれら 3 つの図を比較すると、応力の標準偏差 σ_N は $\eta = 1$ のとき 0.0066, $\eta = 5$ のとき 0.012, $\eta = 75$ のとき 0.014 となり、半径比が大きいほど増加することが確認できる。つまり、形状が細長くなるにつれて応力の変動は大きくなる。これは介在物の半径比が大きいほど x_1 方向への補強効果が強いいため、体積比率の変動によって応力が変動しやすいという妥当な結果が得られた。さらに、半径比が大きいほど応力の非対称性も強くなっている。4-(1) 節でも同様だが、応力変動の期待値は FEM 解より小さくなるが、そのピークは FEM 解より大きい場所に移動する。

ここで、標準偏差 σ_N の形状比の違いによる影響を詳しく検証するために、体積比率が 10% の場合に加え、20%, 25%, 30%, 40% の場合の結果を 1 つの図にまとめると、図-7 のような結果が得られた。この図から分かることは

- 体積比率 $f = 25\%$ より大きい場合、 σ_N にピークが生じる
- ピークとなる半径比は体積比率が大きくなるほど小さくなる
- 半径比によらず体積比率が大きいほど応力の変動は大きい
- 半径比が大きい場合は半径比が小さい場合に比べて体積比率による応力変動の差が少ない

の 4 点が挙げられる。これらの結果から、体積比率が 25% を超えるような場合、半径比を大きくしても応答のバラツキはほとんど変わらない、もしくは、半径比を大きくするほど応答のバラツキが少なくなるということになる。特に 2 点目の傾向は体積比率の大きさの

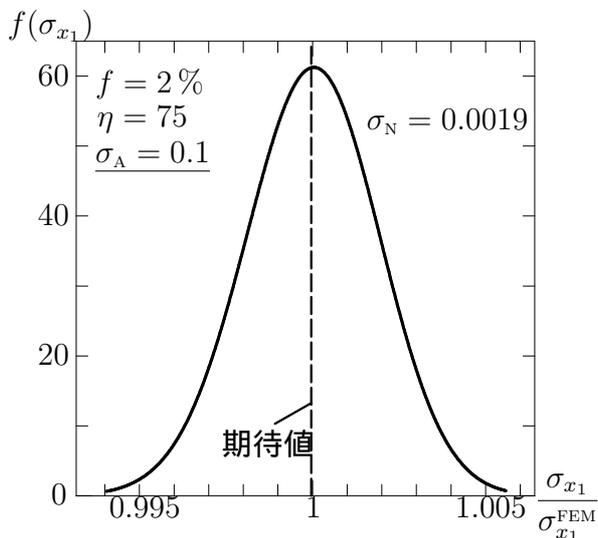


図-2 $\sigma_A = 0.1$ のときの応力の確率変動

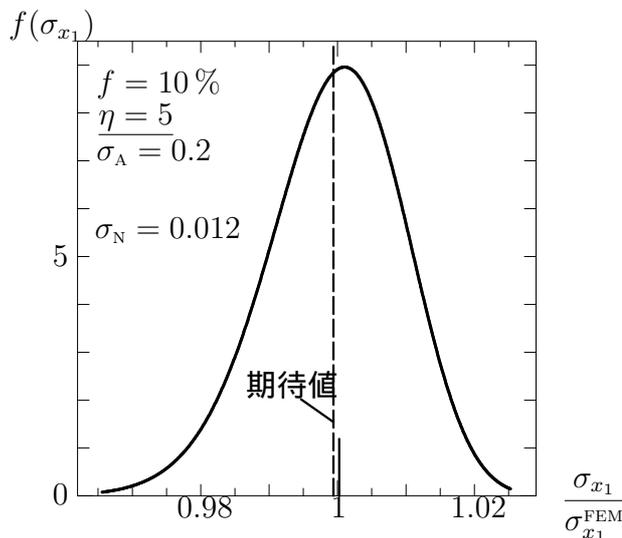


図-5 半径比が $\eta = 5$ の場合の応力の確率変動

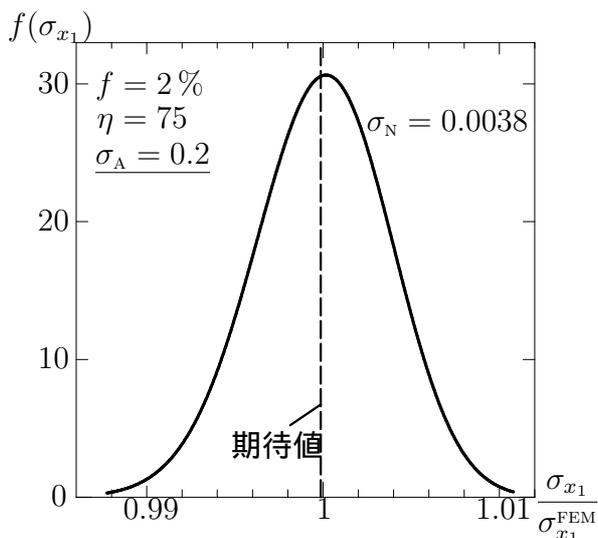


図-3 $\sigma_A = 0.2$ のときの応力の確率変動

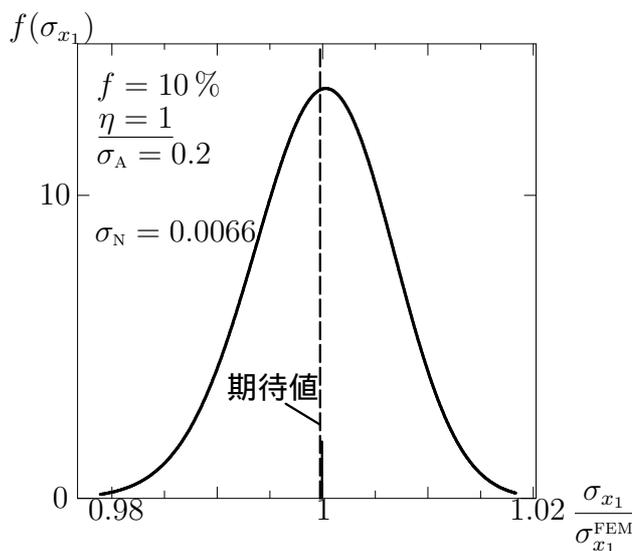


図-6 半径比が $\eta = 1$ の場合の応力の確率変動

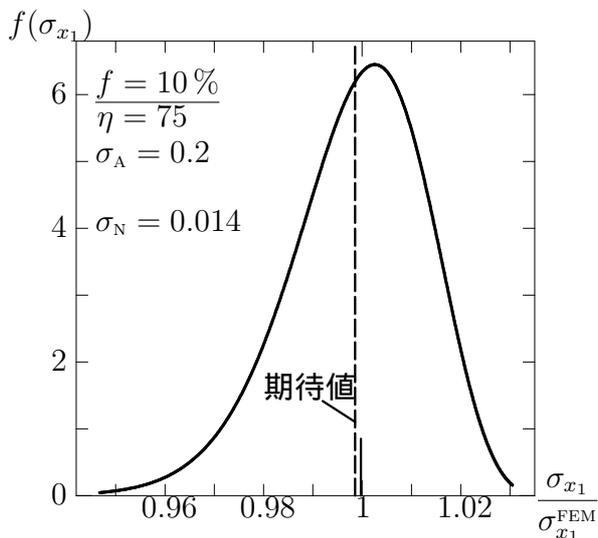


図-4 $\sigma_A = 0.2, f = 10\%$ のときの応力の確率変動

みに依存し、標準偏差 σ_A の値には依存しないということは、ここでは示さないが確認できている。この傾向は、既往の研究における弾性テンソルの傾向と整合する。つまり半径比が大きい場合、体積比率が小さいと

きにオリジナルの森・田中の界と逆の界に近く、体積比率が大きいときにオリジナルの森・田中の界に近い予測を与える。これは、介在物の半径比を大きくした場合、森・田中の手法は介在物の相互作用をかなり強めに考慮するためである。

5. 体積比率のばらつきが及ぼす影響

図-8 に示された連続梁は 4. 節で扱った単純梁の中央をローラー支承したものに等しい。また、材料定数も 4. 節と同様の値を用いている。図中の f_1, f_2, f_3 は介在物の体積比率がこの 5 つの領域に分けられ、3 種類の体積比率が存在することを意味している。また、介在物はすべて x_1 方向に細長いものとし、その半径比は $\eta = 75$ である。

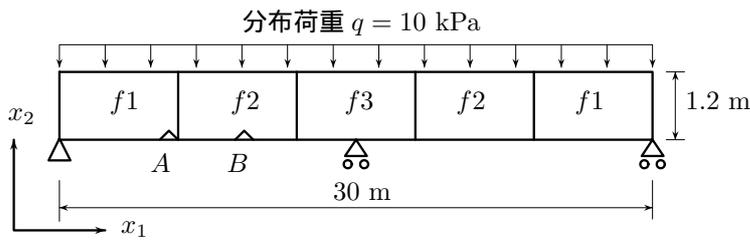


図-8 対象とする連続梁

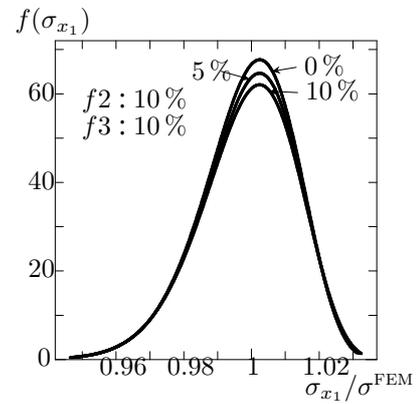


図-9 要素Bの応力変動 (f1が変化)

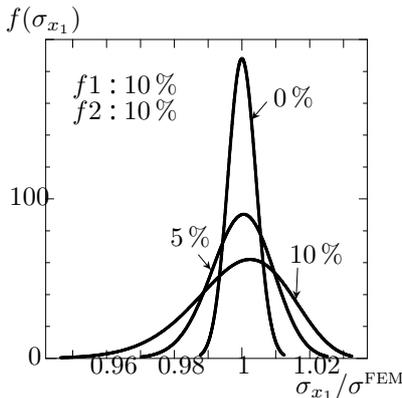


図-10 要素Bの応力変動 (f3が変化)

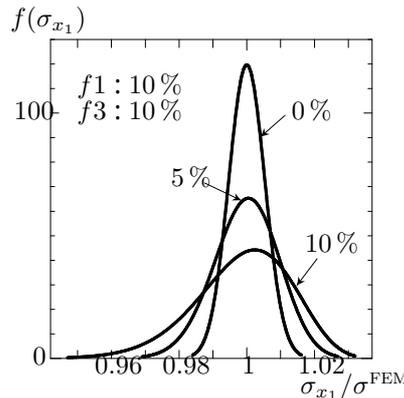


図-11 要素Aの応力変動 (f2が変化)

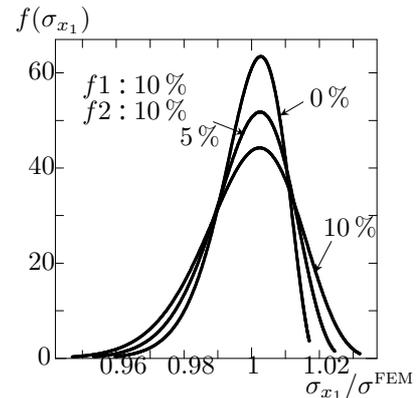


図-12 要素Aの応力変動 (f3が変化)

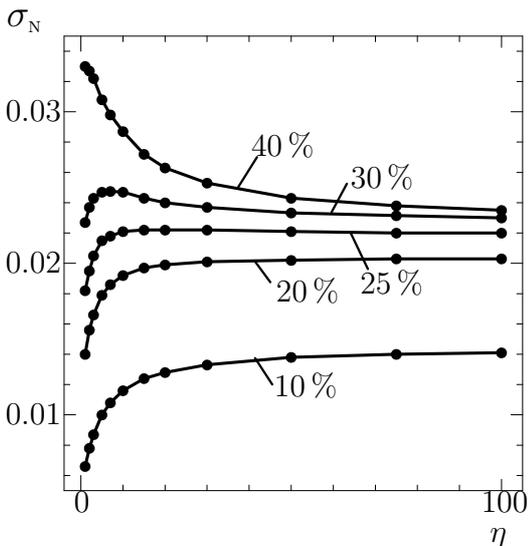


図-7 体積比率が異なる場合の η による σ_N の推移

まず初めに、領域 f_2 と f_3 の体積比率を 10% に固定し、領域 f_1 の体積比率を 0%、5%、10% と変化させたときの要素 B の応力の確率変動の変化を表した図が図-9 である。また、領域 f_1 と f_2 の体積比率を 10% に固定し、領域 f_3 の体積比率を 0%、5%、10% と変化させたときの要素 B の応力の確率変動の変化を表した図が図-10 である。領域 f_1 の体積比率を変化させた場合、要素 B の応力の確率変動にほとんど変化が現れないが、領域 f_3 の体積比率を変化させた場合は、応力

の確率変動が大きく変化する。これは、この連続梁のモーメント図から明らかなように、領域 f_3 の補強効果が大いなのに対して、領域 f_1 は補強効果が小さいためである。全ての領域の体積比率が 10% になったときの標準偏差 σ_N は 0.014 であった。

次に、領域 f_1 と f_3 は体積比率を 10% に固定し、領域 f_2 の体積比率を 0%、5%、10% と変化させたときの応力の確率変動が図-11 である。これは図-10 の結果に近い応力変動の変化を示している。領域 f_3 に負のモーメントが大きくかかるのに対し、領域 f_2 では正のモーメントが同程度かかるため、この結果が得られたと考えられる。

最後に、領域 f_1 と領域 f_2 の体積比率を 10% に固定し、領域 f_3 の体積比率を 0%、5%、10% と変化させたときの要素 A の応力の確率変動の変化を示したのが図-12 である。この図と図-10 を比較することで、領域 f_3 の体積比率の変化が要素 A に及ぼす影響と、要素 B に及ぼす影響との違いが分かる。その違いとして、領域 f_3 が要素 A に及ぼす影響は隣り合う領域の要素 B ほど強くないということが挙げられる。さらに、図-11 と比較することにより、やはり、隣り合う領域 f_2 の変化がもたらす影響の方が強くなっている。

6. まとめ

解析的な手法による複合材料の弾性係数が適用された定ひずみ有限要素に対して、標準的な確率有限要素法の定式化を行い解析を行った。その結果は予測の範囲内であるが、簡便な手法によって体積比率の変動が及ぼす影響を定量的に予測できた。

参考文献

- 1) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 2) 岩熊哲夫・堀宗朗・森 勉・村外志夫：複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価，構造工学論文集，Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 3) 中桐滋・久田俊明：確率有限要素法入門，培風館，1985.
- 4) 田中良弘・武者浩透・下山義秀・小林忠司：PC 橋梁に用いた超高強度繊維補強コンクリートの用途開発，コンクリート工学論文集，Vol.41, No.3, pp.26-32, 2003.

(2004年2月9日提出)