

# 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測

Prediction of Overall Yielding and Flow Rule of Composites

岩崎 智昭\*

Tomoaki IWASAKI

\*構造強度学研究室 (指導教官: 岩熊哲夫 教授)

The overall yielding behavior of anisotropic composites is affected by the hydrostatic pressure. A method to predict the overall elasto-plastic behavior of composites based on the Mori-Tanaka theory is expanded to estimate the normality or the associativeness for the overall flow rule of composites quantitatively. An approximate phenomenological constitutive model is used to evaluate the hydrostatic effect of subsequent yielding quantitatively, and the results are compared with experimental data.

**Key Words :** composites, overall flow rule, overall yield surface, overall plastic strain rate, non-associativeness, Mori-Tanaka theory

## 1. まえがき

新材料開発を行う際に実験を網羅的に行うのは非効率であり、予め実験材料をある程度絞り込むような簡易予測手法があれば便利である。森・田中理論<sup>1)</sup>は弾性の枠組みで、比較的簡便な計算により複合材料の弾性剛性や初期降伏曲面を算定できる。この理論を弾塑性まで拡張した研究も多いが、具体的に微視的な流れ則を組み込んだ手法は少なく、応力・ひずみ曲線や初期降伏曲面はいくつか求められているが、後続降伏曲面等の予測が定量的には行われていない。

介在物が球形でない場合の複合材料の降伏挙動は一般に静水圧依存となり、初期降伏強度のみならず流れ則の関連性等にも影響を及ぼす。ここでは特に弾性円柱介在物を含む複合材料を取り上げ、その静水圧の影響を含んだ等方内塑性挙動について法線則のずれを定量的に示すとともに、本手法の増分計算と静水圧依存の現象論的モデルとを対比することにより、静水圧の影響を考慮する材料パラメータを同定して近似的構成則を導く。

## 2. 増分型の森・田中理論の定式化

### (1) 森・田中の平均化手法

無限に大きい母材にただ 1 種類の形状の回転楕円体介在物が多数存在している材料を対象とする。森・田中の平均化を用いると、母材のみ降伏している場合、巨視的応力増分  $\dot{\sigma}$  が作用したときの母材・介在物の応力増分  $\dot{\sigma}_M, \dot{\sigma}_I$  と巨視的全ひずみ増分  $\dot{\epsilon}$  は

$$\dot{\sigma}_M = A\dot{\sigma} + D\dot{\epsilon}_M^p, \quad \dot{\sigma}_I = B\dot{\sigma} + E\dot{\epsilon}_M^p \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon} = \bar{C}^{-1}\dot{\sigma} + F\dot{\epsilon}_M^p \quad (2)$$

のように表される。ここに  $\dot{\epsilon}_M^p$  は母材の塑性ひずみ増分である。 $\bar{C}^{-1}$  は巨視的接線弾性剛性、 $A, B$  は増分応力集中係数であり、これらは  $D, E, F$  も含め、煩雑ではあるが森・田中理論によって陽な形で導かれる 4 階のテンソルであり、これらの中に各材料の弾性剛性・体積比率、介在物形状等が含まれる。巨視的塑性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}^p$  は全ひずみ増分と弾性部分との差で、式 (2) より

$$\dot{\epsilon}^p \equiv \dot{\epsilon} - \bar{C}^{-1}\dot{\sigma} = F\dot{\epsilon}_M^p \quad (3)$$

と定義でき、体積比率を乗じた重み平均にはならない。また式 (1) にあるように、見かけ上弾性介在物も母材の降伏ひずみの影響を受ける。同様の定式化は介在物あるいは母材・介在物共に降伏する場合も陽な形で行える。

### (2) 母材の流れ則

母材・介在物は共に弾性は Hooke の法則で、塑性は等方硬化のみを有する  $J_2$  塑性論に従うものとし、母材の塑性ひずみ増分は Prandtl-Reuss 流の関連流れ則で

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M \quad (4)$$

とする。ここに  $H_M$  は母材の硬化係数であり、 $\sigma'_M$  は母材の偏差応力、 $(J_2)_M$  はその第 2 不変量である。

### (3) 巨視的降伏条件

巨視的挙動は本来微視構造に支配されるため、巨視的な降伏条件は母材の平均応力がその降伏応力に達した時点で定義し、その降伏関数は Power-law で

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - \{\sigma_M^y + h_M (\epsilon_M^{eq})^{n_M}\} / \sqrt{3} \quad (5)$$

と仮定した。ここに  $\sigma_M^y$  は母材の単軸初期引張り降伏応力であり、 $h_M, n_M$  は硬化パラメータである。また相当塑性ひずみは  $\epsilon_M^{eq} = \sqrt{2\epsilon_M^p : \epsilon_M^p}$  である。

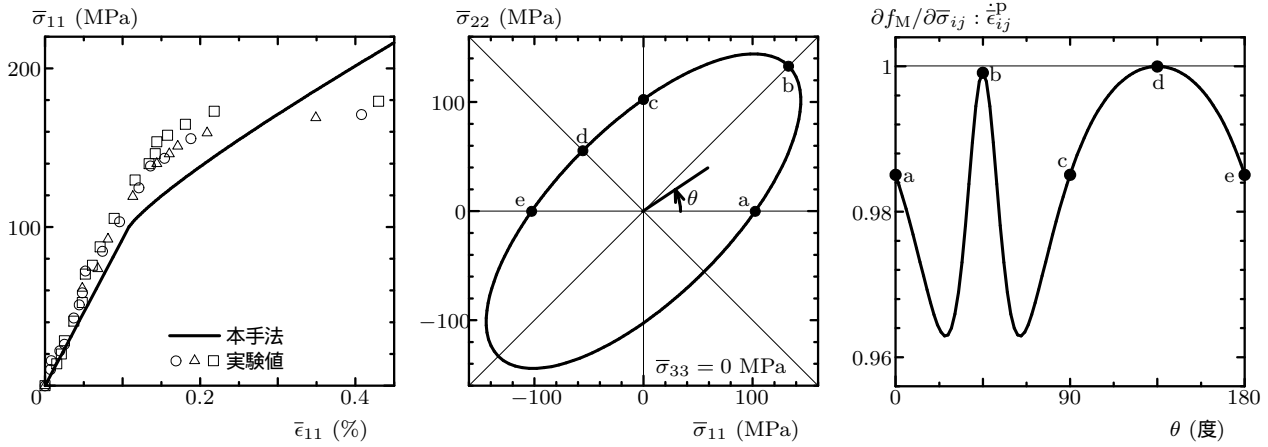


図-1 Al-B 複合材料の応力・ひずみ関係 図-2 円柱介在物を含む複合材料の等方面内の初期降伏曲面 図-3 巨視的降伏曲面法線と巨視的塑性ひずみ増分との比較

### 3. 応力・ひずみ関係の実験値との整合性

介在物が球形でない場合の森・田中の予測は、介在物の長軸方向に対しては弾性でさえ剛性を非常に大きく見積もり、例えばファイバーのような整列性のある長繊維の材料を含む場合の長軸方向の応力・ひずみ関係は、一般に過大評価となってしまう。これに対し図-1はBファイバーを含むAl母材の複合材料について、ファイバーの長軸が全て  $x_3$  方向を向いているものとして、 $x_1$  方向に単軸引張り载荷した場合の応力・ひずみ関係について実験値<sup>2)</sup>と本手法の予測値を示したものである。これによると介在物の短軸方向の挙動に関しては、本手法の予測値は比較的实验と良い整合を示している。

### 4. 初期降伏時の塑性ひずみ増分の法線性

$x_1$ - $x_2$  面内に円断面を持ち、 $x_3$  方向に無限に長い形状の弾性円柱介在物を含む複合材料を対象として、巨視的初期降伏状態での降伏曲面の法線と巨視的塑性ひずみ増分を3次元ベクトル成分のように扱い、それらを正規化したもの同士の内積を計算することにより定量的に比較を行う。母材はヤング率  $E=60$  GPa、ポアソン比  $\nu=0.32$ 、初期降伏応力  $\sigma^y=90$  MPa、介在物は  $E=380$  GPa、 $\nu=0.2$ 、体積比率 15% とした。図-2は3次元主応力空間における巨視的初期降伏曲面の、巨視的主応力  $\bar{\sigma}_{33}=0$  での断面である。例えば a 点は単軸引張りによる降伏状態を表し、b 点は2軸引張り、d 点はせん断による降伏状態である。図-3はそれらの各初期降伏状態における巨視的初期降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の向きとの内積を示したもので、これによると  $x_1$ - $x_2$  面内は等方であるにも拘わらず、介在物形状による異方性によって静水圧の影響が含まれ、ほとんどの場合に法線則が成立していない。唯一両ベクトルが一致しているのは、静水圧が働かないせん断を与えた d 点であ

る。ここに示した数値例では、3次元空間的にずれの角度を求めると 15 度程度であるが、体積比率などを変えることによって内積値は変化し、もっとずれが大きくなることもある。

### 5. 現象論的構成モデルとの対比

ここではさらに、本手法の増分計算と静水圧の影響を考慮した現象論的モデルとを対比し、具体的に静水圧の影響を含んだ巨視的材料パラメータを同定し、その影響の定量表現を試みる。

#### (1) 静水圧の影響を考慮した非関連構成モデル

静水圧の影響を考慮した構成モデルとして文献<sup>3)</sup>のモデルを用いて、巨視的な塑性ひずみ増分  $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}$  を

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} = \dot{\bar{\lambda}} \left( \frac{\bar{\sigma}'_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{I}} \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{H}} \left( \frac{\bar{\sigma}'_{kl}}{2\sqrt{J_2}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}} \delta_{kl} \right) \dot{\bar{\sigma}}_{kl} \quad (7)$$

とする。ここに  $\bar{H}$  は巨視的硬化係数、 $\bar{\sigma}'_{ij}$  は巨視的な偏差応力、 $J_2$  はその第2不変量である。また  $\bar{F}$ 、 $\bar{G}$  はそれぞれ巨視的な降伏関数・塑性ポテンシャルを表し、その巨視的静水圧  $\bar{I}$  に関する微係数  $\partial \bar{F} / \partial \bar{I}$ 、 $\partial \bar{G} / \partial \bar{I}$  が圧力依存係数・ダイレタンシー係数である。つまり  $\bar{G} = -\bar{F}$  のとき関連流れ則であり、それ以外は非関連となる。 $\partial \bar{G} / \partial \bar{I}$  は式(6)の縮約や偏差応力との内積を取り、 $\dot{\bar{\lambda}}$  を等置することにより

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{I}} = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_{kk}^P \sqrt{J_2}}{3\bar{\sigma}'_{ij} \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^P} \quad (8)$$

となるが、 $\partial \bar{F} / \partial \bar{I}$ 、 $\bar{H}$  はこのままでは求められない。したがってここでひとつ近似をし、 $\bar{H}$  が巨視的応力増分

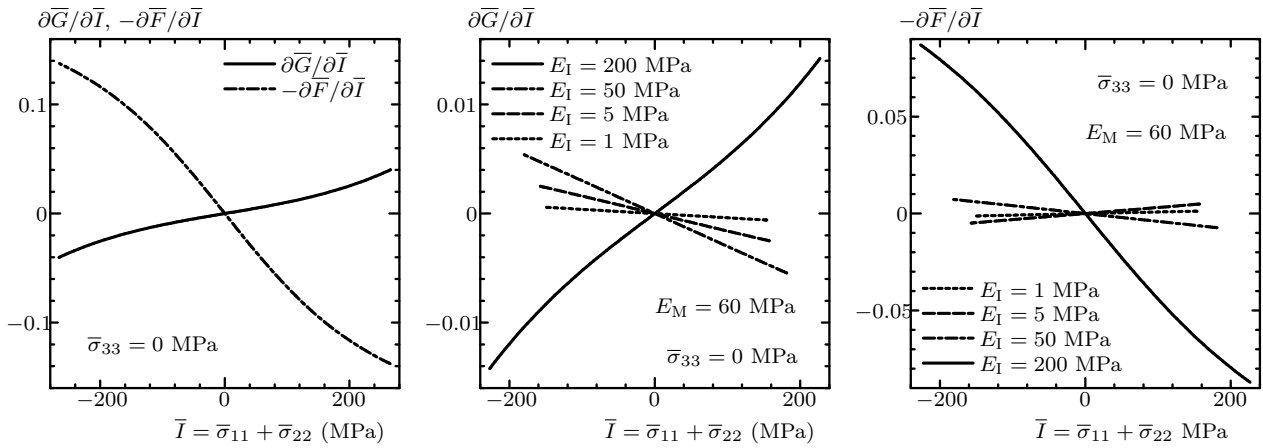


図-4 等方面内の載荷による初期降伏時の  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  図-5 介在物のヤング率による初期降伏時の  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$  の変化 図-6 介在物のヤング率による初期降伏時の  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  の変化

に依存しないものとする、 $\dot{\sigma}_{kk}=0$  の応力増分を与えた場合のみ、式 (7) より  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  に関係なく  $\bar{H}$  を

$$\bar{H} = \frac{\sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl}}{2\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (9)$$

と決定できる。したがって各降伏状態において  $\dot{\sigma}_{kk}=0$  となる増分を与えて  $\bar{H}$  を予め求めておき、これを実際の増分計算において式 (7) に代入し、さらに  $\dot{\lambda}$  を消去すれば、 $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  が

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{I}} = \frac{\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij}}{2\sqrt{J_2} \dot{\sigma}_{kk}} - \frac{\bar{H} \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\sigma}_{kk} \sqrt{J_2}} \quad (10)$$

と求まる。ここで式 (10) の計算の際には、 $\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = 0$  となる応力増分を与えないように注意が必要である。

## (2) 巨視的な塑性ポテンシャルと降伏関数の関数形

前節で扱った材料と方法を用いて、図-2の種々の初期降伏状態で実際に  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$  と  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  を求めたのが図-4である。横軸は各応力状態を巨視的静水圧  $\bar{I} = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}$  で表したものである。この場合は  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $-\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  の傾きの正負が異なるため非関連流れ則であるが、ともに奇関数であることから  $\bar{G}$ ,  $\bar{F}$  はともに凸関数であると予測できる。

次に、母材はそのままに、弾性介在物のヤング率を変化させたときの  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  の関数形の変化を示したのが図-5, 6である。これを見ると、介在物のヤング率が小さくなるにつれて  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  の傾きは小さくなり、一旦負の傾きのピークを迎えた後に0に近づいていく。つまりこれは空隙を含むだけの材料の塑性物性は母材のみの場合と変わらず、静水圧の影響はないことを示している。ただし弾塑性体の中にやや抵抗のある水を含んだ空気のようなものが存在する場合に匹敵するような  $E_1=50$  MPa や  $E_1=5$  MPa の場合には、 $\bar{I} < 0$  で  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I} > 0$  となっており、これは圧縮することにより

体積膨張が発生する砂のダイランシーのような現象を意味する。さらに  $E_1=50$  MPa の場合は、介在物と母材のヤング率が近いことによって  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$  と  $-\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  の関数形が似るため、関連流れ則に近づいていることが分かる。

## 6. 後続降伏の現象論的近似構成則

### (1) 巨視的後続降伏曲面

図-1で対象とした材料を用いて、実際に  $x_1$  方向に単軸引張りの増分計算を行い、巨視的相当塑性ひずみ0.5%時の巨視的後続降伏曲面を描いたのが図-7である。これを見ると本手法の巨視的後続降伏曲面は、母材そのものの等方硬化によって拡大しながら移動硬化していることが分かる。このように微視的には等方硬化のみの仮定で巨視的に移動硬化する現象はすでに文献<sup>4)</sup>でも指摘されているが、その原因のひとつとして挙げられているのが残留応力である。本手法では母材が降伏したときの応力増分は式 (1) で与えられ、一度降伏すれば例えば除荷しても式 (1) の右辺第2項が残留応力となる。後続降伏に関しても降伏条件は式 (5) で与えられることから、巨視的には見かけ上の移動硬化が起こることになる。

### (2) 近似構成則

上の増分計算において、時々刻々  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$ ,  $\bar{H}$  を計算してプロットしたものが図-8に細い実線で示されている。ここではこれらの関数を近似して巨視的構成則を導く。

今回の増分計算では母材の硬化則として Power-law を用いており、塑性ひずみが0の初期降伏状態では発生する塑性ひずみ増分が無限大になってしまい数値的に解を得ることができないため、計算上予め非常に小さな塑性ひずみを入れている。図-8を見ると初期降伏時の  $\bar{H}$  のみ変な予測値を与えているが、これは Power-law を

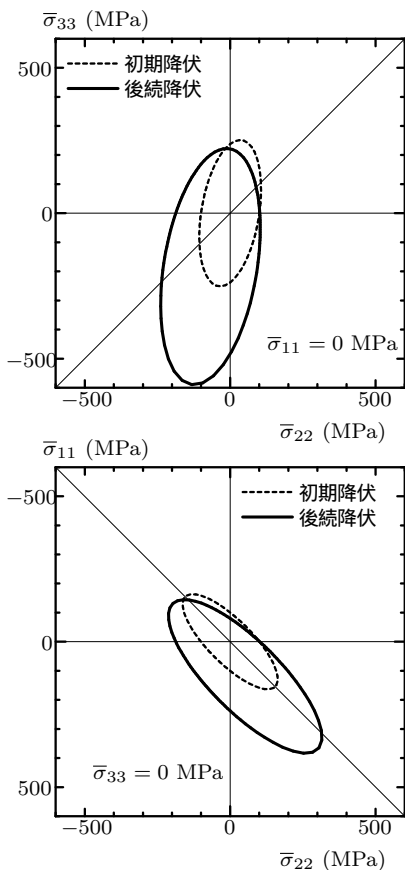


図-7 後続降伏曲面

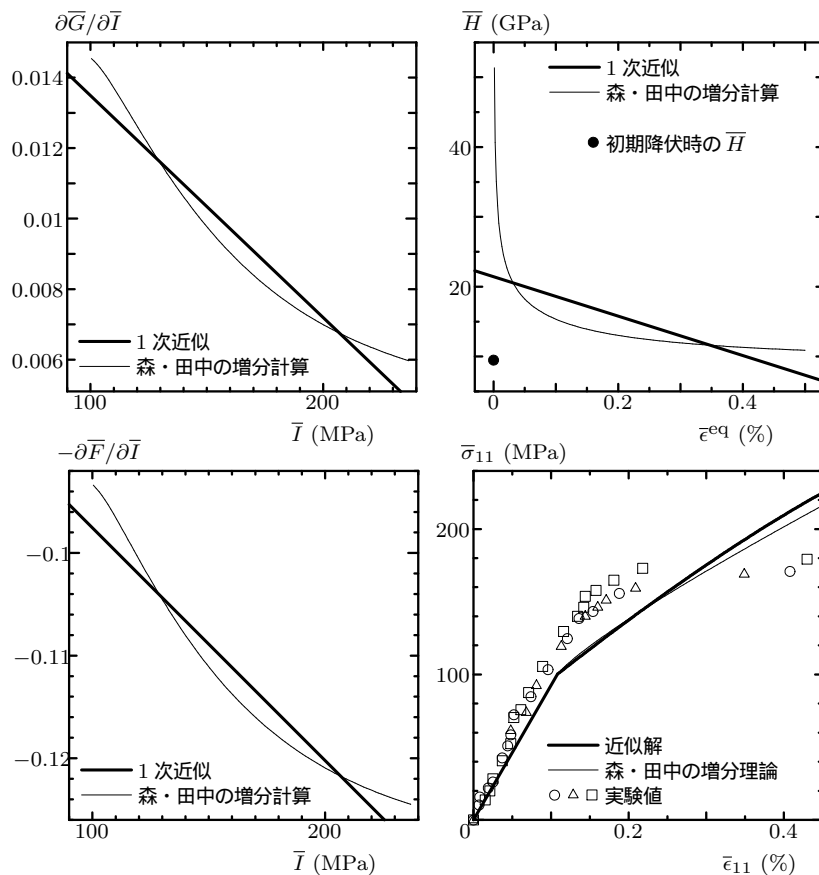


図-8 近似構成則

用いたことが原因だろう。したがってここでは  $\bar{H}$  の近似については初期降伏時の値は除き、その他の  $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ ,  $\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$  については初期降伏時の値も入れて回帰直線で近似した。図-8の右下図の太い実線がこのようにして求められた近似構成則であり、細い実線が元々の本手法の増分計算による予測値である。この近似構成則は元々の増分計算による予測値に近い値を得ており、しかも実験値にも近い。

しかしここで導かれた静水圧の影響を含んだパラメータは本来、载荷増分に依存し、静水圧あるいは相当塑性ひずみのみでは決まらない。しかしこれもさまざまなケーススタディを行うことによって、静水圧と相当塑性ひずみの両方を含んだ関数で近似することも可能であろうし、これらのパラメータがあらゆる载荷に対して適用できれば、それを用いて境界値問題への適用なども可能となる。

## 7. まとめ

増分型の森・田中理論に流れ則を組み込んだ手法を定式化することにより、次のような知見を得た。

- 2相問題の増分塑性理論に対して、陽な形で森・田中理論を拡張した。
- 数値的に後続降伏曲面を描き、見かけ上の移動硬化

の原因が残留応力にあることを式の形でも示した。

- 巨視的な塑性ひずみ増分と巨視的初期降伏曲面の法線とを比較することで、一般に複合材料は非法線性すなわち非関連性を有することを定量的に示した。
- 現象論的モデルと比較することによって静水圧等の影響を定量的に示した。
- 現象論的な巨視的材料パラメータを用いた近似モデルの構築を試み、実験値とも比較的良い整合が見られた。

## 参考文献

- 1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 2) Ju, J.W. and Zhang X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.
- 3) Nemat-Nasser, S. and Shokoh, A.: On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solids Structures*, Vol.16, pp.495-514, 1980.
- 4) 松井和己・寺田賢二郎・京谷孝史・岩熊哲夫：弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏局面の評価, 土木学会論文集, No.682/I-56, pp.335-346, 2001.

(2002年2月8日提出)