

複合非線形性を考慮した梁の簡易弾塑性解析

Simple elasto-plastic analysis of thin-walled beams taking account of hybrid nonlinearity

藤原 健史*

Takeshi FUJIWARA

*構造強度学研究室 (指導教官: 岩熊 哲夫 教授)

In this paper, a formulation for large displacement analysis of thin-walled beams taking account of hybrid nonlinearity including geometric nonlinearity and material nonlinearity is presented. The material nonlinearity considers strain hardening effects and coupling effects between normal stresses and torsional shear stresses. The numerical results show that the formulation is capable of carrying out accurate nonlinear inelastic analyses. It is demonstrated that the formulation has a practical use for determining optimum stiffening in erection of beam structures.

Key Words : finite displacement, hybrid nonlinearity, I-beam, optimum stiffening

1. まえがき

昨今、「公共工事のコスト縮減」を求める世間の声は強く、土木工学分野にもその影響が広がりつつある。こういった時代の要請を受け、構造物の経済性や耐久性の向上、建設事業の省力化・安全性向上、工期短縮などが大きな目標の1つとして掲げられている。そうした中で、構造を簡略化して施工数量を低減した少数主桁橋などのいわゆる合理化橋において一般的な構造部材としての薄肉開断面梁の有用性が見直され、これらを有効に利用した構造物が増えている。このような部材は、架設段階での横倒れ座屈などの面外不安定問題に対する検討が重要視されているが、こうした問題を正確に解析するには、幾何学的非線形性だけでなく材料非線形性をも考慮した、複合非線形問題として扱う必要がある。

本研究では梁要素の定式化において幾何学的非線形性については、オイラー角を用いた座標変換行列と要素の変形後のつりあいから導かれる幾何剛性行列とで考慮する。一方、材料非線形性についてはファイバーモデルを導入することで各断面要素のひずみと応力を算定し、断面定数を数値積分で求めることで断面の塑性化に伴う剛性低下を考慮することにする。また、軸方向応力とねじりによるせん断応力の連成作用を考慮し、相当塑性ひずみをパラメータとして、ひずみ硬化の影響も含んだトリリアモデルの構成則を用いる。

以上のことを踏まえ、幾つかの直線I形梁の弾塑性解析を行い本定式化の妥当性と実用性について考察する。

2. 梁要素の定式化

一般に有限変位解析には、初期無載荷状態からの全変位量を変数として定式化する Total-Lagrangian 手法 (TL 手法) と、既知の変形状態からの微小な増分変位

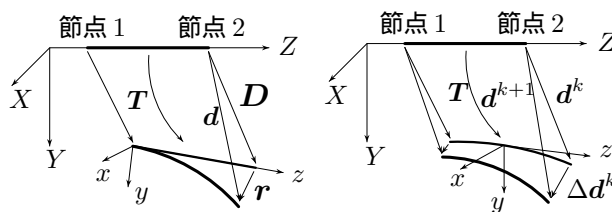


図-1 梁要素の変形と座標系 (TL 手法) 図-2 梁要素の変形と座標系 (UL 手法)

量を変数として定式化する Updated-Lagrangian 手法 (UL 手法) が用いられる。UL 手法は TL 手法よりも支配方程式は簡潔になるが、常に初期状態から荷重増分を累積していく必要があるなど両定式化には一長一短がある。本研究では種々の問題に対するそれぞれの解を比較し、両者の適性や汎用性についても検討していく。

(1) Total-Lagrangian 手法

図-1 のように変位 d と相対変位 r を定義し、外力 f のモーメント成分は回転自由度と仕事をする成分として定義する。仮想仕事式 ($f^T \delta d = f_\ell^T \delta r_\ell$) に全体系の外力と局所系の外力を結びつける関係式 ($f = R^T f_\ell$) と局所系での剛性方程式 ($f_\ell = K r_\ell$) を代入し、変位に関する増分をとると接線剛性方程式は次のようになる¹⁾。

$$\Delta f = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial S^T}{\partial d} R^T K T_{14}^T r + S^T \frac{\partial R^T}{\partial d} K T_{14}^T r \\ & + S^T R^T K \frac{\partial T_{14}^T}{\partial d} r + S^T R^T K T_{14}^T \frac{\partial r}{\partial d} \end{aligned} \right] \Delta d \tag{1}$$

ここで T は有限回転を表現できるオイラー角を用いた座標変換行列であり、増分変位ベクトル Δd の回転自由度には空間固定 3 軸回りの微小回転角を用いた。

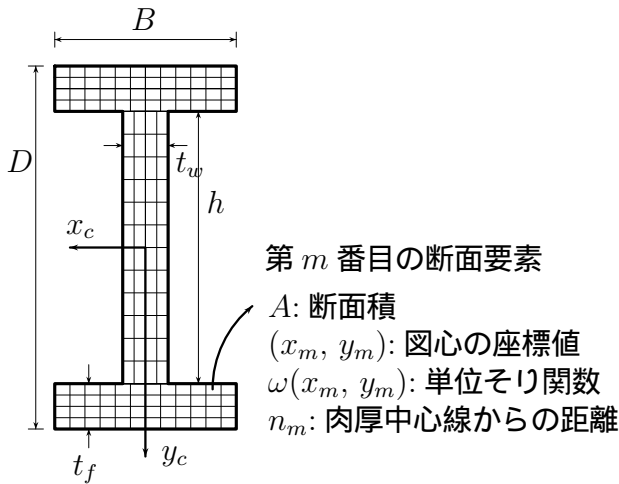


図-3 ファイバーモデルによる断面分割

第 m 番目の断面要素

A : 断面積

(x_m, y_m) : 図心の座標値

$\omega(x_m, y_m)$: 単位そり関数

n_m : 肉厚中心線からの距離

(2) Updated-Lagrangian 手法

図-2 に示すように外力 f^k を受けて初期無載荷状態から d^k だけ変位したときのつりあい状態が既知であると仮定する．この状態から増分荷重 Δf^k を受けて増分変位 Δd^k だけ変位するとき、この増分変位が微小であれば次のような増分剛性方程式が成り立つ．

$$\Delta f^k = T_{14}^k (K^k + K_G^k) T_{14}^{kT} \Delta d^k \quad (2)$$

前ステップで求めた d^k を代入して得られる既知の T_{14}^k , K^k , K_G^k を用いて式 (2) を解き Δd^k を得る． Δd^k を全変位 d^k に加えることで、 $(k+1)$ 段階のつりあい状態における全変位 d^{k+1} を求める．荷重 f^{k+1} や断面力 r^{k+1} も同様に増分を累積して算出する．

3. 材料非線形問題の解法

本研究では図-3 のように梁断面を要素軸方向にファイバー状に並ぶ微小な断面要素に分割し、この断面要素毎に弾塑性判定を行う．

各断面要素の軸方向ひずみ ε_z と St-Venant のねじりによるせん断ひずみ γ_{zs} は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= w' - u''(x - y\theta_z) - v''(y + x\theta_z) - \omega\theta_z'' \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ u''^2 + v''^2 + (x^2 + y^2)\theta_z'^2 \right\} \\ \gamma_{zs} &= 2n\theta_z' = \Theta\theta_z' \end{aligned} \quad (3)$$

ここに (x, y) は断面要素の図心の座標値、 u, v, w, θ_z はそれぞれ X, Y, Z -軸方向の並進変位と Z -軸回りの回転角である．また (\prime) は Z に関する一回微分を表す．

本研究では von Mises の降伏条件に基づき断面の降伏判定を行うが、その際に判定基準のパラメータとなる相当応力 $\bar{\sigma}$ は $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zs}^2}$ で算出し、相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ひずみ増分 $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ の累積で定義する．具体的な弾塑性判定は次のように行う．

$$\begin{cases} \bar{\sigma} < \sigma_y & \rightarrow \text{弾性域 } (\bar{\varepsilon}^p = 0) \\ \bar{\sigma} \geq \sigma_y & \rightarrow \bar{\varepsilon}^p \text{ を計算} \\ \begin{cases} 0 < \bar{\varepsilon}^p < \varepsilon_{st} - \varepsilon_y & \rightarrow \text{塑性域} \\ \bar{\varepsilon}^p \geq \varepsilon_{st} - \varepsilon_y & \rightarrow \text{ひずみ硬化域} \end{cases} \end{cases}$$

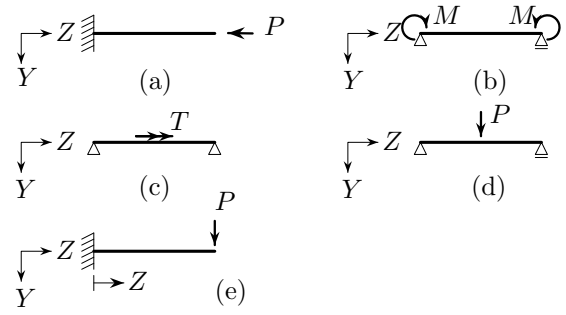


図-4 解析モデル

ここで、 σ_y, ε_y は初期降伏応力、初期降伏ひずみを、 ε_{st} はひずみ硬化開始時のひずみを表している．

各増分ステップで各断面要素の降伏判定をし、増分応力を累積した全応力を用いて断面積分を行い各種断面定数と断面力を求める．得られた断面定数と断面力を用いて式 (1), (2) の剛性行列を更新していく．このとき断面分割数が粗いと精度よく数値計算を行えないため、本研究では上下フランジとウェブをそれぞれ板幅方向に 50 分割、板厚方向に 12 分割した case1 と、40 分割、25 分割した case2 で解析を行う．

4. 弾性解析

弾性解析は σ_y を E の 10^8 倍としてどのような載荷レベルでも断面に塑性箇所が発生しないようにして行う．

(1) Euler 座屈の座屈後挙動

2次元の大変位問題として軸圧縮を受ける片持ち梁の座屈後挙動を解析する．解析対象は図-4 (a) に示す．断面諸元は $D = 300$ mm, $B = 150$ mm, $t_f = 13$ mm, $t_w = 8$ mm, $L = 4$ m とし、材料定数は $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$ で解析を行う．

要素数 4, 8, 16 に対する本数値解を楕円積分解と併に図-5 に示す．縦軸には荷重 P を座屈荷重 P_{cr} で除したものを、横軸には梁先端部の面外方向変位 u を部材長 L で無次元化した値をとった．無次元化荷重が $P/P_{cr} = 1.5$ 付近までであれば、要素数 16 程度の解析で楕円積分解にほぼ一致した結果が得られた．

(2) 等曲げを受ける単純梁の座屈荷重の収束性

図-4 (b) の等曲げを受ける単純梁の横倒れ座屈を解析し、要素数の増加による本数値解の収束性を確認する．梁は $D = 255.9$ mm, $B = 146.4$ mm, $t_f = 10.9$ mm, $t_w = 6.4$ mm, $L = 4.39$ m であり、材料定数は $E = 2.0 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$ とする．この問題に対して座屈前の面内変位を考慮した場合と無視した場合の解析解²⁾が存在するため、本数値解とそれらと比較する．

縦軸に座屈モーメント、横軸に要素数を対数でとった解析結果を図-6 に示す．TL 手法による数値解は面内変位を考慮した解析解に、UL 手法による数値解は面内変位を無視した解析解に収束していることが分かる．

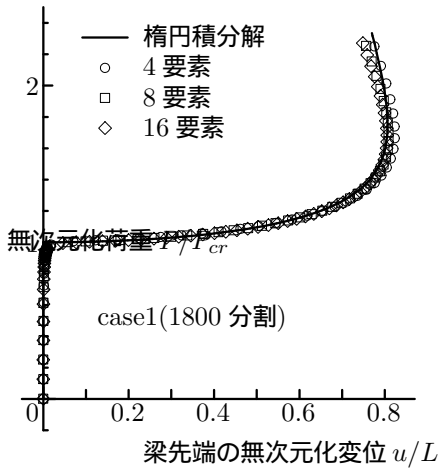


図-5 Euler 座屈の座屈後挙動 (UL 手法)

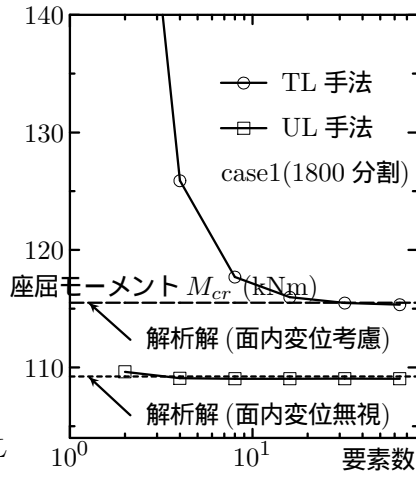


図-6 座屈荷重の収束性

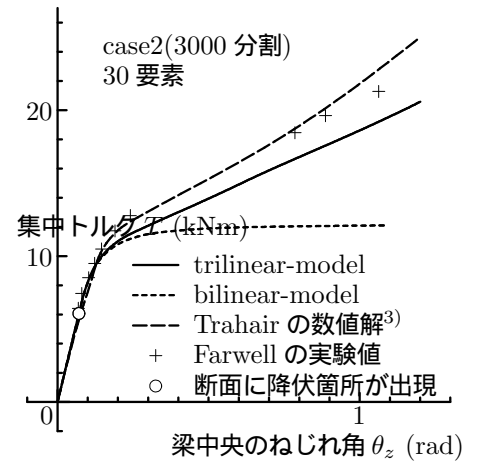


図-7 ねじりが作用する単純梁の弾塑性挙動

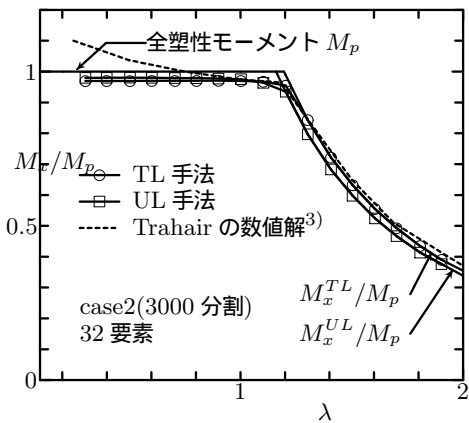


図-8 等曲げを受ける単純梁の耐荷力曲線

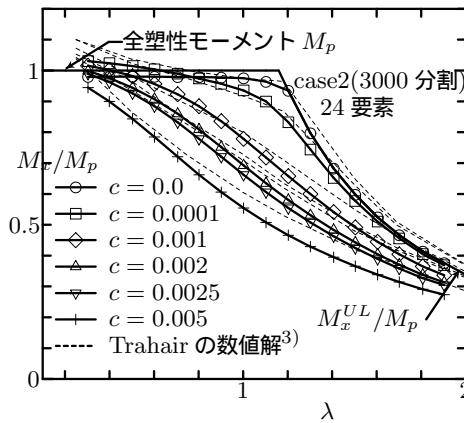


図-9 初期不整の影響 (UL 手法)

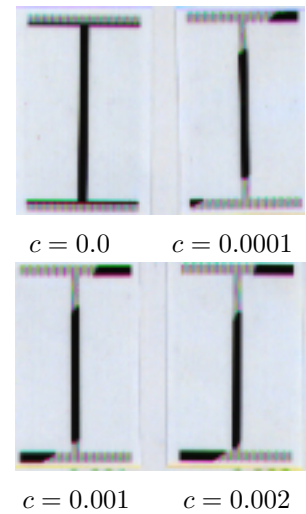


図-10 塑性域の様子 ($\lambda = 0.706$)

5. 弾塑性解析

(1) ねじりを受ける単純梁の弾塑性挙動

図-4(c)のような中央部に集中トルクを受ける単純梁の弾塑性挙動を UL 手法で解析する。梁は $D = 152.4$ mm, $B = 150.9$ mm, $t_f = 12.2$ mm, $t_w = 8$ mm, $L = 1.93$ m で、弾性係数は $E = 2.0 \times 10^5$ MPa, $E_p = 0$ MPa, $E_s = 6.0 \times 10^3$ MPa, 初期降伏応力 $\sigma_y = 2.5 \times 10^2$ MPa, ひずみ硬化開始時のひずみ $\varepsilon_{st} = 0.01375$ とする。

本解析結果を縦軸に集中トルク T を、横軸に梁中央部のねじれ角 θ_z をとって図-7 に示す。断面に降伏箇所が発生してから初期の段階までは本数値解は既存の数値解³⁾や実験値とよく一致しているが、荷重の増加に伴い実験値との間に誤差が生じている。しかし bilinear-model に比べ、応力の連成作用やひずみ硬化の影響を含む解析ができていたことが確認できた。

(2) 中央に集中荷重を受ける単純梁の耐荷力特性

ここでは図-4(d) に示した中央に集中荷重を受ける単純梁の耐荷力特性について調べる。断面は 4.(2) 節と同

様とし、材料諸元は前節と同じものを用いる。またこの梁の断面の全塑性モーメントは $M_p = 119.66$ kNm となる。この M_p と 4.(2) 節で用いた等曲げを受ける単純梁の座屈に対する解析解 M_{cr} を用いて、細長比パラメータ λ を次のように定義する。

$$\lambda = \sqrt{\frac{M_p}{M_{cr}}} \quad (4)$$

縦軸に最大モーメント M_x を M_p で除した無次元化荷重を、横軸に λ をとり、TL 手法、UL 手法をそれぞれ用いた解析結果と Trahair の数値解³⁾ を図-8 に示す。2 つの定式化による数値解を比較すると、弾性の範囲では座屈前の面内変位の影響を正確に考慮できる TL 手法が UL 手法よりもやや高めであるが、塑性化により部材が崩壊する範囲では定式化による違いはほとんど見られない。しかし Trahair の数値解と比較すると λ が小さな範囲ではやや小さな値となっている。本解析では断面の塑性化が梁中央部に集中し、その部分の断面剛性が極端に小さくなり崩壊に至っている。そこで断面の塑性化が集中しないように初期不整を与えて同様の解析を行って

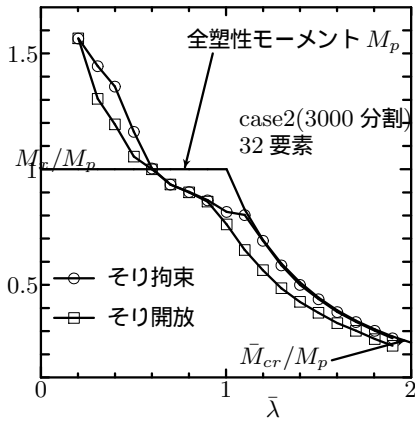


図-11 片持ち梁の耐荷力曲線

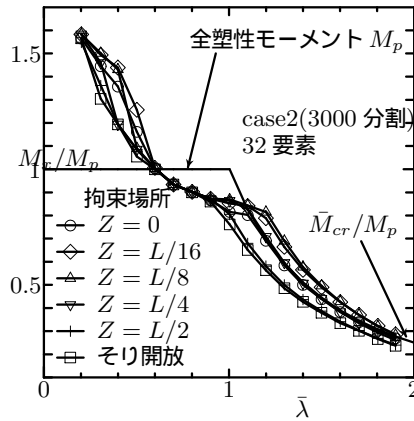


図-12 そりの拘束場所による影響

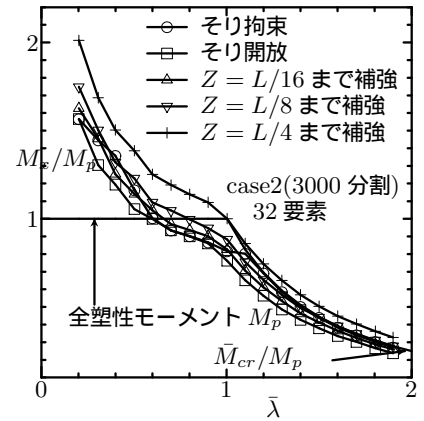


図-13 断面補強の影響

る．初期不整は次のように回転角成分に与える．

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{\pi c}{L} \cos\left(\frac{\pi Z}{L}\right) \\ \theta_z &= c \sin\left(\frac{\pi Z}{L}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

縦軸と横軸は図-8と同様にし，初期不整の倍率 c を $c = 0, 0.0001, 0.001, 0.002, 0.0025, 0.005$ として UL 手法で解析した結果を Trahair の数値解³⁾と伴に図-9に示す．初期不整の影響により塑性化する断面要素は梁中央部から両端へと分布したが，初期不整が $c = 0.005$ より小さな場合にはひずみ硬化状態になる断面要素は現れなかった．しかし λ が小さな範囲では，耐荷力が M_p を上回る結果も得られた．また図-10には $\lambda = 0.706$ の場合における梁中央部の断面内の塑性域の広がりを示した．

(3) 先端部に集中荷重を受ける片持ち梁の耐荷力特性

ここより実際的な架設時を想定して自由端に集中荷重が作用する片持ち梁の耐荷力について TL 手法による定式化で解析を行う(図-4(e))．梁断面は $D = 613 \text{ mm}$ ， $B = 190 \text{ mm}$ ， $t_f = 13 \text{ mm}$ ， $t_w = 25 \text{ mm}$ とし，弾性の材料定数は $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$ ， $\nu = 0.3$ ，塑性域の材料定数は前節までと同様とする．この問題に対して Chajei⁴⁾は次のような座屈解を与えている．

$$P_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{L^2} \left(3.95 + 3.52 \sqrt{\frac{\pi^2 EI_w}{GJL^2}} \right) \quad (6)$$

この解析解を用い最大モーメントを $\bar{M}_{cr} = P_{cr} L$ とし，細長比パラメータを $\bar{\lambda} = \sqrt{M_p / \bar{M}_{cr}}$ と定義し直す．

固定端でのそりの境界条件を拘束した場合と開放した場合の本解析結果を図-11に示す．縦軸は前節と同様に無次元化荷重 M_x / M_p を，横軸には定義し直した細長比パラメータ $\bar{\lambda}$ をとった．固定端でのそりを拘束しない場合の耐荷力はそりを拘束した場合に比べて，弾性座屈の範囲で最大 18.8%，ひずみ硬化域に達した断面要素が生じる $\bar{\lambda} < 0.6$ の範囲では最大 12.1% 低下してしまう．このような危険性を避けるために何等かの補剛処置を施すことが考えられる．そこで本解析結果から得られる情報を元に最適な補剛法について調べてみる．

まず，ダイヤフラム等を用いて片持ち梁のある場所ですりを拘束する補剛法について考える．そりを拘束する場所は固定端から $Z = L/16, L/8, L/4, L/2$ として解析した結果を，固定端でそりを拘束した場合とそりを開放した場合の解析結果と伴に図-12に示す．梁中央部より自由端側でそりを拘束しても耐荷力の上昇は望めないが， $Z = L/16, L/8$ でそりを拘束すると固定端で拘束する場合より耐荷力の面では有利になることが分かる．

次に上下フランジの厚さを2倍に補強して解析を行う．補強する断面は固定端から $Z = L/16, L/8, L/4$ までとして解析した結果を図-13に示す．そりを開放した場合でも， $Z = L/4$ までの断面を補強すればそりを拘束した場合よりも大きな耐荷力を示すことが分かる．

以上の結果より，最適な補剛方法や具体的な補剛断面，補剛場所について数値的に推定することができた．

6. まとめ

本研究では，梁要素を用いた TL 手法と UL 手法で，幾何学的非線形性と応力の連成作用やひずみ硬化の影響も含む材料非線形性を共に考慮した複合非線形解析の定式化を行った．本定式化で大変位問題や初期不整の影響を適切に考慮した弾塑性解析を行えることを確認した．

座屈前の面内変位の影響など TL 手法でない正確に解析できない場合もあったが，殆どの実験的な弾塑性問題では UL 手法でも十分な精度が確認できた．

また片持ち梁の耐荷力特性に対する解析では，本解析から得られる情報を元に最適な補剛方法を数値的な試行により推定できるなど，本簡易解析の実用性を示した．

参考文献

- 1) 後藤文彦, 小林裕, 岩熊哲夫: オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法, 構造工学論文集 Vol. 43A, pp. 333-338, 1997.
- 2) Vacharajittiphan and Trahair, : Flexural-torsional buckling of curved members, *Journal Of Structural Division*, ST6, pp. 1223-1238, 1975.
- 3) Yong Lin Pi and Trahair: Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. II: Applications, *Journal Of*

Structural Engineering, Vol. 120, No. 7, July, pp2062-2085, 1994.

- 4) Chajei, A. : *Principles of structural stability theory*, Prentice-Hall, Inc. , Englewood Cliffs, N. J. , 1974.

(2001年2月8日提出)